TD Master 2 – Processus aléatoires

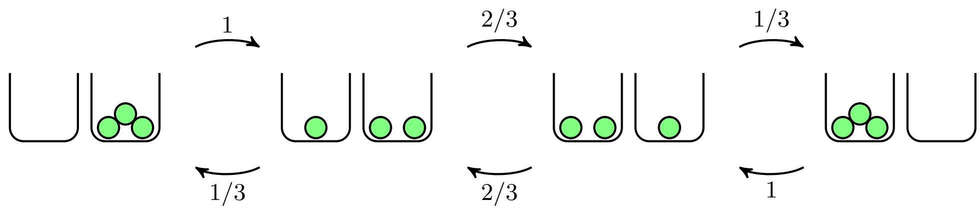
Série 1 – Révisions chaînes de Markov

Exercice 1

Le modèle des urnes d'Ehrenfest est une chaîne de Markov sur l'ensemble $\mathcal{X} = \{0, 1, \dots N\}$ de probabilités de transition

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{i}{N} & \text{si } j = i - 1 , \\ 1 - \frac{i}{N} & \text{si } j = i + 1 , \\ 0 & \text{sinon} , \end{cases}$$

La figure suivante illustre le cas $N = 3$.



1. Montrer que cette chaîne de Markov est irréductible. Est-elle apériodique ?
2. Montrer que la distribution de probabilité invariante de cette chaîne de Markov suit une loi binômiale, dont on précisera les paramètres.

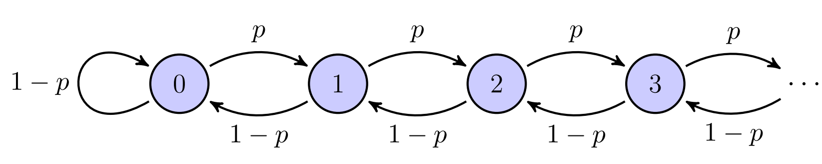
Exercice 2

Soit $\mathcal{G} = (V, E)$ un graphe non orienté connexe fini. Soit X_n la chaîne de Markov sur V construite en choisissant pour X_{n+1}, de manière équiprobable, l'un des sommets adjacents à X_n.

1. Montrer que le nombre de voisins de chaque site forme un vecteur réversible.
2. En déduire une expression pour la distribution stationnaire de la chaîne.

Exercice 3

Soit $p \in [0, 1]$. On considère la chaîne de Markov suivante sur $\mathcal{X} = \mathbb{N}$:



1. Pour quelles valeurs de p la chaîne est-elle irréductible?
   On suppose dans la suite que p est tel que la chaîne soit irréductible.
2. La chaîne est-elle apériodique?
3. On suppose que la chaîne est réversible, et soit α un vecteur réversible. Ecrire une relation de récurrence pour les composantes de α, et en déduire α_n en fonction de α_0.
4. Pour quelles valeurs de p la chaîne admet-elle une distribution stationnaire π? Déterminer π pour ces valeurs de p.
5. Pour quelles valeurs de p la chaîne est-elle récurrente? Récurrente positive?
6. Déterminer le temps de récurrence moyen $\mathbb{E}_0(\tau_0)$.
7. Calculer la position moyenne $\mathbb{E}_\pi(X_n)$ pour les valeurs de p telles que π existe.

Exercice 4

On considère une marche aléatoire unidimensionnelle symétrique sur l'ensemble $\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, N\}$ avec conditions aux bords absorbantes, c'est-à-dire que l'on suppose les états 0 et N absorbants. Soit

$$\tau = \tau_0 \wedge \tau_N = \inf\bigl\{n \geqslant 0 \colon X_n \in \{0, N\}\bigr\}$$

le temps d'absorption, et soit

$$p(i) = \mathbb{P}_i\{X_\tau = N\} .$$

1. Déterminer $p(0)$ et $p(N)$.
2. Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, N-1\}$, on a

$$p(i) = \frac{1}{2}\bigl[p(i-1) + p(i+1)\bigr] .$$

   Une fonction $f : \mathbb{Z} \supset A \to \mathbb{R}$ telle que $f(i) = \frac{1}{2}[f(i-1) + f(i+1)]$ pour tout $i \in A$ est appelée *harmonique* (discrète).
3. Montrer (par l'absurde) le *principe du maximum*: Une fonction harmonique sur A ne peut atteindre son minimum et son maximum qu'au bord de A (on pourra supposer A de la forme $A = \{a, a+1, \dots, b-1, b\}$, dans ce cas son bord est $\partial A = \{a, b\}$).
4. Montrer que si f et g sont deux fonctions harmoniques sur A, alors toute combinaison linéaire de f et g est encore harmonique.
5. Montrer que si f et g sont deux fonctions harmoniques sur A, qui coïncident sur le bord de A, alors elles sont égales partout dans A (considérer $f - g$).
6. Montrer que toute fonction linéaire $f(i) = ci + h$ est harmonique.
7. En utilisant les points 1., 2., 5. et 6., déterminer la fonction p.