Licence 2 d'Informatique – Probabilités

Contrôle continu du 22 avril 2024

Corrigé

Exercice 1 (4 points)**.**

1. (a) A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
   (b) A, B et C sont indépendants si et seulement si on a $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$ et $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$.
2. On peut supposer qu'il y a une probabilité de $\frac{1}{12}$ de tirer chacune des boules. Comme 6 boules parmi les 12 ont un numéro pair, on a $\mathbb{P}(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.
   Comme 4 boules parmi les 12 ont un numéro multiple de 3, on a $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.
   L'événement $A \cap B$ contient les multiples de trois pairs, c'est-à-dire les multiples de 6. On a donc $A \cap B = \{6, 12\}$, et $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.
   Comme par ailleurs $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, les événements A et B sont indépendants.
3. On peut supposer qu'il y a une probabilité de $\frac{1}{13}$ de tirer chacune des boules. Comme 6 boules parmi les 13 ont un numéro pair, on a $\mathbb{P}(A) = \frac{6}{13}$.
   Comme 4 boules parmi les 13 ont un numéro multiple de 3, on a $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{13}$.
   L'événement $A \cap B$ contient les multiples de trois pairs, c'est-à-dire les multiples de 6. On a donc $A \cap B = \{6, 12\}$, et $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{13}$.
   Comme par ailleurs $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{6}{13} \cdot \frac{4}{13} = \frac{24}{169} \neq \frac{2}{13}$, les événements A et B ne sont pas indépendants.
4. Par le même raisonnement qu'au point 2, on a $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$.
   Par ailleurs, la loi de la probabilité totale implique
   $$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D|C)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(D|\Omega \setminus C)\mathbb{P}(\Omega \setminus C) = \frac{5}{11} \cdot \frac{1}{2} + \frac{6}{11} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} .$$
   Finalement, $\mathbb{P}(C \cap D) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{11} = \frac{5}{22} \neq \frac{1}{4} = \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D)$. Les événements C et D ne sont donc pas indépendants.

Exercice 2 (4 points)**.**

1. Un choix possible est $\Omega = \{1, \dots, 6\}^3$ avec la probabilité uniforme. Dans ce cas, on admet que les faces des dés sont numérotées en plus d'avoir une couleur, ce qui fournit 6^3 événements élémentaires.
   Un autre choix possible est $\Omega = \{2, 5\} \times \{4, 1\} \times \{3\}$, car on ne considère que $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ événements élémentaires correspondant aux couleurs obtenues. La probabilité est alors donnée par $p(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = p_1(\omega_1)p_2(\omega_2)p_3(\omega_3)$, avec $p_1(2) = \frac{2}{3}$, $p_1(5) = \frac{1}{3}$, $p_2(4) = \frac{2}{3}$, $p_2(1) = \frac{1}{3}$, et $p_3(3) = 1$.
2. On a d'abord $X_b(\Omega) = \{2, 5\}$, avec la loi $\mathbb{P}\{X_b = 2\} = \frac{2}{3}$ et $\mathbb{P}\{X_b = 5\} = \frac{1}{3}$. Ensuite, $X_r(\Omega) = \{1, 4\}$, avec la loi $\mathbb{P}\{X_r = 1\} = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}\{X_r = 4\} = \frac{2}{3}$. Finalement, $X_n(\Omega) = \{3\}$, avec $\mathbb{P}\{X_n = 4\} = 1$.
3. Comme on a toujours $X_n = 3$, on a $\mathbb{P}\{X_r \geqslant X_n\} = \mathbb{P}\{X_r \geqslant 3\} = \mathbb{P}\{X_r = 4\} = \frac{2}{3}$.
   De manière analogue, $\mathbb{P}\{X_n \geqslant X_b\} = \mathbb{P}\{3 \geqslant X_b\} = \mathbb{P}\{X_b = 2\} = \frac{2}{3}$.
   Finalement, $\mathbb{P}\{X_b \geqslant X_r\} = \mathbb{P}\{X_b = 5\} + \mathbb{P}\{X_b = 2, X_r = 1\} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$.

Exercice 3 (4 points)**.**

1. La probabilité d'atteindre 10 fois la cible est de $(\frac{1}{4})^{10} = \frac{1}{2^{20}}$.
2. La probabilité d'atteindre la cible lors des 2 premiers tirs uniquement est égale à $(\frac{1}{4})^2 \cdot (\frac{3}{4})^8 = \frac{3^8}{4^{10}}$. Comme il y a $\binom{10}{2}$ choix pour les deux tirs qui réussissent, la probabilité cherchée vaut
$$\binom{10}{2}\frac{3^8}{4^{10}} = \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot \frac{3^8}{4^{10}} = \frac{3^{10} \cdot 5}{2^{20}} \;.$$
3. Il s'agit d'une loi binomiale, de paramètres 10 et $\frac{1}{4}$, c'est-à-dire
$$\mathbb{P}\{X = k\} = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{10-k} = \frac{10!}{k!(10-k)!} \cdot \frac{3^{10-k}}{4^{10}}$$
pour $k \in \{0, 1, \dots, 10\}$. Son espérance est $\mathbb{E}(X) = 10 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$, et sa variance est $\mathrm{Var}(X) = 10 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{8}$.
4. La probabilité cherchée est $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{64}$, car l'archer doit rater les deux premiers tirs et réussir le troisième.
5. Y suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{4}$, donc
$$\mathbb{P}\{Y = n\} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3^{n-1}}{4^n}$$
pour $n \in \mathbb{N}^*$. Son espérance vaut 4.

Exercice 4 (4 points)**.**

1. Il y a $\binom{4}{2} = 6$ couples possibles, chacun tiré avec probabilité $\frac{1}{6}$. Comme $X < Y$, on remarque que $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$, alors que $Y(\Omega) = \{2, 3, 4\}$. La loi conjointe du couple (X, Y) est représentée dans le tableau suivant :

$X\backslash Y$	2	3	4	
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$
2	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$
3	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	1

2. Les lois marginales de X et Y sont données dans les marges du tableau ci-dessus.
3. On obtient
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= 1 \cdot \frac{3}{6} + 2 \cdot \frac{2}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{3} \;, \\ \mathbb{E}(X^2) &= 1 \cdot \frac{3}{6} + 4 \cdot \frac{2}{6} + 9 \cdot \frac{1}{6} = \frac{10}{3} \;, \\ \mathrm{Var}(X) &= \frac{10}{3} - \frac{25}{9} = \frac{5}{9} \;, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{2}{6} + 4 \cdot \frac{3}{6} = \frac{10}{3} \;, \\
\mathbb{E}(Y^2) &= 4 \cdot \frac{1}{6} + 9 \cdot \frac{2}{6} + 16 \cdot \frac{3}{6} = \frac{35}{3} \;, \\
\operatorname{Var}(Y) &= \frac{35}{3} - \frac{100}{9} = \frac{5}{9} \;.
\end{aligned}$$

4. On a

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{x=1}^{3} \sum_{y=2}^{4} xy \mathbb{P}\{X = x, Y = y\} = \frac{35}{6} \;,$$

ce qui implique

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{35}{6} - \frac{5}{3} \cdot \frac{10}{3} = \frac{5}{18} \;.$$

Comme $\operatorname{cov}(X, Y) \neq 0$, X et Y ne sont pas indépendantes.

5. Par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 5$.
On aurait aussi pu calculer $\operatorname{Var}(X + Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) + 2\operatorname{cov}(X, Y) = \frac{5}{3}$.

Exercice 5 (4 points)**.**

1. L'ensemble $\{1, 2\}$ a 4 parties, à savoir $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$ et $\{1, 2\}$.
2. On a $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. On observe que

$$\mathbb{P}\{X = x\} = \frac{1}{4} \binom{2}{x}$$

pour $x \in X(\Omega)$, puisqu'il y a $\binom{2}{x}$ parties ayant x éléments. Par conséquent, X suit une loi binomiale de paramètres 2 et $\frac{1}{2}$, et on a $\mathbb{E}(X) = 1$ et $\operatorname{Var}(X) = \frac{1}{2}$.

3. Le tableau suivant donne les valeurs de $Y = \operatorname{Card}(A \cap B)$ en fonction de A et B.

$A \backslash B$	$\varnothing$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1, 2\}$
$\varnothing$	0	0	0	0
$\{1\}$	0	1	0	1
$\{2\}$	0	0	1	1
$\{1, 2\}$	0	1	1	2

On a $Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. Comme les 16 cas sont équiprobable, par indépendance de A et B, on obtient pour la loi de Y

$$\mathbb{P}\{Y = 0\} = \frac{9}{16} \;, \qquad \mathbb{P}\{Y = 1\} = \frac{6}{16} \;, \qquad \mathbb{P}\{Y = 2\} = \frac{1}{16} \;.$$

Il s'agit en fait d'une loi binomiale de paramètres 2 et $\frac{1}{4}$. Cela est dû au fait qu'il y a une probabilité de $\frac{1}{4}$ pour qu'un élément ait été choisi à la fois dans le tirage A et dans le tirage B. Il suit que $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2}$ et $\operatorname{Var}(Y) = \frac{3}{8}$.

4. Le tableau suivant donne les valeurs de $Z = \mathrm{Card}(A \cup B)$ en fonction de A et B.

$A \backslash B$	$\varnothing$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\varnothing$	0	1	1	2
$\{1\}$	1	1	2	2
$\{2\}$	1	2	1	2
$\{1,2\}$	2	2	2	2

   On a $Z(\Omega) = \{0,1,2\}$. Comme les 16 cas sont équiprobable, par indépendance de A et B, on obtient pour la loi de Z

$$\mathbb{P}\{Z=0\} = \frac{1}{16}\;, \qquad \mathbb{P}\{Z=1\} = \frac{6}{16}\;, \qquad \mathbb{P}\{Z=2\} = \frac{9}{16}\;.$$

   Il s'agit en fait d'une loi binomiale de paramètres 2 et $\frac{3}{4}$. Cela est dû au fait qu'il y a une probabilité de $\frac{3}{4}$ pour qu'un élément ait été choisi dans l'un au moins des tirages A et B. Il suit que $\mathbb{E}(Z) = \frac{3}{2}$ et $\mathrm{Var}(Z) = \frac{3}{8}$.

5. Il suit de la relation $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$ que l'on a $Y + Z = X + X'$. Comme X et X' sont indépendantes et ont même loi, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y+Z) &= \mathbb{E}(X+X') = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X') = 2\;,\\ \mathrm{Var}(Y+Z) &= \mathrm{Var}(X+X') = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(X') = 1\;.\end{aligned}$$

6. En résolvant l'identité $\mathrm{Var}(Y+Z) = \mathrm{Var}(Y) + \mathrm{Var}(Z) + 2\,\mathrm{cov}(Y,Z)$ par rapport à la covariance, on obtient

$$\mathrm{cov}(Y,Z) = \frac{1}{2}\big[\mathrm{Var}(Y+Z) - \mathrm{Var}(Y) - \mathrm{Var}(Z)\big] = \frac{1}{8}\;.$$