Licence 2 d'Informatique – Probabilités

Contrôle terminal du 22 avril 2024

Durée: 2 heures
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.
Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.
Les téléphones portables, ordinateurs, tablettes et autres appareils électroniques doivent être éteints.
Les points sont donnés à titre indicatif.

Exercice 1 (4 points)**.**

1. Soient A, B et C trois événements d'un espace probabilisé discret (Ω, p). Définir
   (a) A et B sont indépendants.
   (b) A, B et C sont indépendants.
2. Une urne contient 12 boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 12. On tire une boule de l'urne, et on considère les événements A : « le numéro de la boule tirée est pair » et B : « le numéro de la boule tirée est un multiple de 3 ». Les événements A et B sont-ils indépendants ?
3. Même question si l'urne contient 13 boules.
4. On revient au cas où l'urne contient 12 boules. On tire deux boules de suite, sans remise. On considère les événements C : « le numéro de la première boule tirée est pair » et D : « le numéro de la seconde boule tirée est pair ». Les événements C et D sont-ils indépendants ?

Exercice 2 (4 points)**.**

On jette trois dés truqués: un dé blanc, dont 4 faces ont 2 points et 2 faces ont 5 points; un dé rouge, dont 4 faces ont 4 points et 2 faces ont 1 point; et un dé noir, dont toutes les faces ont 3 points.

1. Donner un espace probabilisé discret (Ω, p) permettant de modéliser cette situation (plusieurs réponses sont possibles).
2. On note, respectivement, X_b, X_n et X_r le nombre de points indiqués par le dé blanc, noir et rouge. Déterminer l'image et la loi de chacune de ces trois variables aléatoires.
3. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(X_r \geqslant X_n)$, $\mathbb{P}(X_b \geqslant X_r)$ et $\mathbb{P}(X_n \geqslant X_b)$.

Exercice 3 (4 points)**.**

Un archer tire 10 fois de suite sur une cible. On admet qu'à chaque tir, il a une probabilité de $1/4$ d'atteindre la cible, et que les tirs sont indépendants.

1. Quelle est la probabilité que l'archer atteigne la cible 10 fois ?

2. Quelle est la probabilité que l'archer atteigne la cible exactement 2 fois ?
3. Soit X le nombre de fois que l'archer atteint la cible. Quelle est la loi de X ? Donner son espérance et sa variance.
4. Quelle est la probabilité que l'archer atteigne la cible pour la première fois lors du troisième tir ?
5. On suppose maintenant que l'archer continue de tirer, jusqu'à ce qu'il touche la cible pour la première fois. Soit Y le nombre de tirs jusqu'au premier succès. Donner la loi de Y et son espérance.

Exercice 4 (4 points)**.**

On tire simultanément deux boules dans une urne contenant 4 boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à 4. On note X le plus petit numéro tiré, et Y le plus grand numéro tiré.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
3. Calculer l'espérance et la variance de X et de Y.
4. Calculer la covariance de X et de Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Calculer l'espérance de $X + Y$.

Exercice 5 (4 points)**.**

On rappelle qu'une partie d'un ensemble E est un sous-ensemble $A \subset E$, qui peut être l'ensemble vide. On tire d'abord une partie A de $\{1, 2\}$ de manière uniforme, c'est-à-dire que toutes les parties sont tirées avec la même probabilité. Puis on tire une deuxième partie B de $\{1, 2\}$, toujours de manière uniforme, et indépendamment du premier tirage.

1. Donner la liste de toutes les parties de $\{1, 2\}$.
2. Identifier la loi de la variable aléatoire $X = \mathrm{Card}(A)$. Calculer son espérance et sa variance.
3. Soit la variable aléatoire $Y = \mathrm{Card}(A \cap B)$. Déterminer sa loi, son espérance et sa variance.
4. Même question avec $Z = \mathrm{Card}(A \cup B)$.
5. Exprimer $Y + Z$ en fonction de X et $X' = \mathrm{Card}(B)$. En déduire l'espérance et la variance de $Y + Z$.
6. À l'aide de la question précédente, calculer la covariance de Y et Z.