Licence 2 d'Informatique – Probabilités

Contrôle terminal, session 2 du 21 juin 2024

Corrigé

Exercice 1 (5 points)**.**

1. (a) $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B)$ (défini à condition que $\mathbb{P}(B) > 0$).
   (b) A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
   (Si $\mathbb{P}(B) > 0$, c'est équivalent à $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.)
2. (a) Il y a 4 as parmi les 52 cartes, donc $\mathbb{P}(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.
   La moitié des cartes étant rouges, on a $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$.
   Deux parmi les 4 as sont rouges, d'où $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$.
   (b) Comme $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{1}{26} = \mathbb{P}(A \cap B)$, les événements A et B sont indépendants.
3. (a) Une première méthode est de considérer des tirages successifs sans remise, et de prendre la somme sur tous les ordres possibles. La probabilité de tirer d'abord deux boules blanches, puis deux boules non blanches est de

$$\frac{3}{13} \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{9}{10} = \frac{9}{2 \cdot 11 \cdot 13} \ .$$

   On s'aperçoit que la probabilité est la même pour tous les ordres. Il y a $\binom{4}{2} = 6$ positions possibles pour deux blanches parmi 4. Par conséquent,

$$\mathbb{P}(A) = 6\frac{9}{2 \cdot 11 \cdot 13} = \frac{27}{11 \cdot 13} \ .$$

   On peut également faire le calcul en utilisant les combinaisons avec répétition.

   (b) Calculons d'abord la probabilité de tirer deux boules blanches aux tirages 3 et 4, sachant qu'on a tiré deux boules rouges aux deux premiers tirages. Celle-ci vaut

$$\frac{3}{11} \cdot \frac{2}{10} = \frac{3}{55} \ .$$

   Cette probabilité conditionnelle est la même pour tout ordre des boules blanches et noires. Il suit que

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{3}{55} \ .$$

   (c) Comme $\mathbb{P}(A|B) \neq \mathbb{P}(B)$, les événements A et B ne sont pas indépendants.

Exercice 2 (5 points)**.**

1. La probabilité que le cycliste arrive à destination sans se faire mouiller vaut $\left(\frac{4}{5}\right)^5 = \frac{4^5}{5^5}$

2. La probabilité qu'il pleuve sur exactement un tronçon vaut
$$5 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{4^4}{5^4} \,.$$
Le facteur 5 correspond au choix du tronçon où il pleut, et les deux autres facteurs à la probabilité qu'il pleuve sur un tronçon, et pas sur les deux autres.
3. X suit une loi binomiale de paramètre 5 et $\frac{1}{5}$. Par les propriétés de la loi binomiale vues en cours, on a $\mathbb{E}(X) = 5 \cdot \frac{1}{5} = 1$ et $\mathrm{Var}(X) = 5 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$.
4. Il faut qu'il ne pleuve pas sur les 4 premiers tronçons, et qu'il pleuve sur le cinquième tronçon. La probabilité vaut
$$\left(\frac{4}{5}\right)^4 \frac{1}{5} = \frac{4^4}{5^5} \,.$$
5. Y suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{5}$. Son espérance vaut 5.

Exercice 3 (5 points)**.**

1. Obtenir deux pile consécutifs pour la première fois en deux lancers revient à faire pile aux deux lancers. On a donc
$$p_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \,.$$
2. Pour que $X = 3$, la seule possibilité est d'avoir obtenu deux pile lors des lancers 2 et 3, mais face au lancer 1. Il suit que
$$p_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{27} \,.$$
3. Pour que $X = 4$, il y a deux cas à considérer. Soit on a obtenu pile, puis face, puis deux fois pile, soit on a obtenu deux fois face, puis deux fois pile. On a donc
$$p_4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{12}{81} = \frac{4}{27} \,.$$
4. Pour avoir $X = n$, on distingue à nouveau deux cas.
Si le premier jet a donné pile, il faut que le deuxième donne face, puis qu'on fasse $n-2$ jets donnant deux piles successifs pour la première fois aux jets $n-3$ et $n-2$.
Si le premier jet a donné face, il faut que les $n-1$ suivants donnent deux piles successifs pour la première fois aux jets $n-2$ et $n-1$.
Si on note P_1 et F_1 les événements « le premier lancer donne Pile » et « le premier lancer donne face », il suit que
$$\begin{aligned} p_n &= \mathbb{P}\{X = n | P_1\}\mathbb{P}(P_1) + \mathbb{P}\{X = n | F_1\}\mathbb{P}(F_1) \\ &= \frac{1}{3} p_{n-2} \frac{2}{3} + p_{n-1} \frac{1}{3} \,. \end{aligned}$$

5. Un calcul direct montre que $p_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et $p_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ sont des solutions particulières de l'équation.
En utilisant les valeurs de p_2 et p_3, on obtient $\alpha = \frac{2}{3}$ et $\beta = \frac{4}{3}$, d'où
$$p_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n .$$
On vérifie que p_4 satisfait aussi cette relation.

Exercice 4 (5 points)**.**

1. On peut supposer les boules toutes dinstinguables. Il y a alors $\binom{6}{2} = 15$ tirages possibles, tous équiprobables.
On regroupe ensuite ces tirages de la manière suivante :
   - Deux boules numérotées 1 : probabilité $3 \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{5}$.
   - Deux boules numérotées 2 : probabilité $\frac{1}{15}$.
   - Deux boules numérotées 3 : impossible.
   - Boules numérotées 1 et 2 : probabilité $6 \cdot \frac{1}{15} = \frac{2}{5}$.
   - Boules numérotées 1 et 3 : probabilité $3 \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{5}$.
   - Boules numérotées 2 et 3 : probabilité $2 \cdot \frac{1}{15} = \frac{2}{15}$.

   La différence X peut prendre les valeurs 0, 1 ou 2. La somme Y peut prendre les valeures 2, 3, 4 et 5. L'examen des différents cas donne la loi jointe suivante :

$X \backslash Y$	2	3	4	5	
0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{15}$	0	$\frac{4}{15}$
1	0	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{15}$	$\frac{8}{15}$
2	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	1

2. Les lois marginales de X et de Y apparaissent dans les marges du tableau ci-dessus.
3. On trouve $\mathbb{E}(X) = \frac{14}{15}$, $\mathbb{E}(X^2) = \frac{4}{3}$, et donc $\mathrm{Var}(X) = \frac{104}{225}$.
Puis $\mathbb{E}(Y) = \frac{10}{3}$, $\mathbb{E}(Y^2) = 12$, et donc $\mathrm{Var}(Y) = \frac{8}{9}$.
4. On trouve $\mathbb{E}(XY) = \frac{52}{15}$, puis $\mathrm{cov}(X,Y) = \frac{16}{45}$. Comme la covariance est non nulle, les variables X et Y ne sont pas indépendantes.
5. On trouve $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \frac{64}{15}$.
6. On a $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{cov}(X,Y) = \frac{1864}{225}$.