Licence 2 d'Informatique – Probabilités

Contrôle terminal, session 2 du 21 juin 2024

Durée: 2 heures
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.
Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.
Les téléphones portables, ordinateurs, tablettes et autres appareils électroniques doivent être éteints.
Les points sont donnés à titre indicatif.

Exercice 1 (5 points)**.**

1. Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé discret (Ω, p). Définir
   (a) La probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(A|B)$.
   (b) A et B sont indépendants.
2. On tire au hasard une carte dans un jeu standard de 52 cartes. On considère les événements $A =$ « la carte est un as » et $B =$ « la carte est rouge ».
   (a) Calculer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$.
   (b) Les événements A et B sont-ils indépendants ?
3. Une urne contient 13 boules dont 6 noires, 3 blanches et 4 rouges. On tire au hasard et simultanément 4 boules de l'urne. On considère les événements $A =$ « on obtient 2 boules blanches » et $B =$ « on obtient 2 boules rouges ».
   (a) Calculer $\mathbb{P}(A)$.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(A|B)$.
   (c) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 2 (5 points)**.**

Un cycliste parcourt 50 kilomètres à vélo. Le trajet est subdivisé en 5 tronçons de 10 kilomètres chacun. On admet qu'il y a une probabilité de $\frac{1}{5}$ qu'il pleuve sur chacun des tronçons. De plus, si A_n dénote l'événement « il pleut sur le $n$ième tronçon », alors les événements A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5 sont indépendants.

1. Quelle est la probabilité que le cycliste arrive à destination sans se faire mouiller ?
2. Quelle est la probabilité qu'il pleuve sur exactement un tronçon ?
3. Soit X le nombre de tronçons sur lesquels il pleut. Quelle est la loi de X ? Donner son espérance et sa variance.
4. Quelle est la probabilité que le cycliste se fasse mouiller la première fois lors du cinquième tronçon ?
5. On suppose maintenant que cycliste continue de rouler jusqu'à ce qu'il commence à pleuvoir. Soit Y le nombre de tronçons parcourus par le cycliste (on compte le tronçon lors duquel il pleut). Donner la loi de Y et son espérance.

Exercice 3 (5 points)**.**

On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est $2/3$, et donc celle d'obtenir face est $1/3$. Les lancers sont supposés indépendants, et on note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux piles consécutifs.

1. Expliquer pourquoi on a $X = 2$ si et seulement si les deux premiers lancers donnent pile. Calculer $p_2 = \mathbb{P}\{X = 2\}$.
2. Montrer qu'on a $X = 3$ si et seulement si on a obtenu face au premier lancer, puis pile aux deux lancers suivants. En déduire $p_3 = \mathbb{P}\{X = 3\}$.
3. Si $X = 4$, quels sont les résultats possibles des deux premiers lancers ? En déduire $p_4 = \mathbb{P}\{X = 4\}$.
4. On note $p_n = \mathbb{P}\{X = n\}$. En s'inspirant de la question précédente, montrer que pour $n \geq 4$, on a $p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}$.
5. Montrer que $p_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et $p_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ sont des solutions particulières de cette équation. En utilisant les valeurs de p_2, p_3 et p_4, trouver $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que
$$p_n = \alpha\left(\tfrac{2}{3}\right)^n + \beta\left(-\tfrac{1}{3}\right)^n$$

Exercice 4 (5 points)**.**

Une urne contient 6 boules en tout, dont trois boules marquées 1, deux boules marquées 2, et une boule marquée 3. On choisit au hasard deux boules dans cette urne. On désigne par X la différence (en valeur absolue) des deux numéros obtenus et par Y la somme des deux numéros obtenus.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
3. Calculer l'espérance et la variance de X et de Y.
4. Calculer la covariance de X et de Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Calculer l'espérance de $X + Y$.
6. Calculer la variance de $X + Y$.