Licence 2 d'Informatique – Probabilités

Contrôle continu du 26 février 2024

Corrigé

Exercice 1 (4 points)**.**

1. (a) f est injective si tout élément de F admet au plus un antécédent.
   (De manière équivalente, f est injective si $f(x) = f(y)$ implique $x = y$).
   (b) f est surjective si tout élément de F admet au moins un antécédent.
   (c) f est bijective si elle est à la fois injective et surjective, donc si tout élément de F admet exactement un antécédent.
2. (a) On a $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 1$ et $f(5) = 3$.
   (b) Chaque élément de E a exactement un antécédent. L'application f est donc injective, surjective, et donc également bijective.
   On peut également argumenter que f est surjective puisque son image est E tout entier. Or pour une application d'un ensemble fini E dans lui-même, l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité sont équivalentes.
3. (a) On a $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(2) = 0$ et $f(3) = 2$.
   (b) f n'est pas surjective, car 1 et 3 n'ont pas d'antécédent. Elle n'est pas non plus injective, car 0 et 2 ont chacun deux antécédents. f n'est donc pas bijective non plus.

Exercice 2 (4 points)**.**

1. Le nombre de codes possibles est $10^4 \cdot 2^2 = 40000$ (formule pour le cardinal d'un produit cartésien).
2. Le nombre est $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 = 20160$ (on compte le nombre d'arrangements sans répétition de 4 chiffres).
3. On peut commencer par chercher le nombre de permutations sans répétition des lettres du mot $XXYZ$, où X représente le chiffre aparaissant deux fois. Ce nombre est $4!/(2!1!1!) = 12$. On choisit alors trois chiffres différents à mettre à la place de X, Y et Z. Il y a pour cela $10 \cdot 9 \cdot 8$ possibilités. Toutefois, en faisant ainsi, on compte deux fois le code obtenu en échangeant les valeurs de Y et Z. Il y a donc finalement $6 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 4 = 17280$ codes possibles.
   Autre raisonnement : Il y a $\binom{4}{2} = 6$ choix pour le placement du chiffre double, $10 \cdot 9 \cdot 8$ choix pour le chiffre double et les deux chiffres simples, et 4 choix pour les deux lettres.
4. La différence par rapport à la question précédente est qu'on ne choisit que les chiffres apparaissant une fois, ce qui donne $9 \cdot 8$ choix, et qu'il y a 3 choix des lettres. Cela équivaut à $6 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 4 = 1728$ codes possibles.

Exercice 3 (4 points)**.**

1. Un espace probabilisé discret est un couple (Ω, p), défini par un ensemble non vide Ω, fini ou dénombrable, et une application $p : \Omega \to [0,1]$ telle que
$$\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1 \ .$$
2. $p(4) = \frac{1}{7}$, puisque la somme des probabilités doit valoir 1.
3. Une possibilité est de considérer que les chaussettes sont numérotées, disons $B_1, B_2, R_1, R_2, V_1, V_2$, et de prendre pour Ω l'ensemble des paires d'éléments dans cette liste. On a $\mathrm{Card}(\Omega) = \binom{6}{2} = 15$. Comme les chaussettes sont supposées indiscernables, on prendra la probabilité uniforme sur Ω, $p(\omega) = \frac{1}{15}$ pour tout $\omega \in \Omega$.
   Considérons alors l'événement $A = \{\{B_1, B_2\}, \{R_1, R_2\}, \{V_1, V_2\}\} \subset \Omega$ qui correspond à choisir deux chaussettes assorties. Sa probabilité est
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} p(\omega) = \frac{1}{5} \ .$$

Exercice 4 (4 points)**.**

1. On peut choisir $\Omega = \{1, \dots, 6\}^n$, avec la probabilité uniforme, $p(\omega) = 6^{-n}$ pour tout $\omega \in \Omega$.
2. C'est la probabilité de $A = \{(1,3), (2,3), (3,3), (3,2), (3,1)\}$ dans le cas $n = 2$, à savoir $\mathbb{P}(A) = \frac{5}{36}$.
3. Passons par la probabilité de l'événement complémentaire.
   - La probabilité de faire aucun nombre pair en deux jets est $\frac{1}{4}$. En effet, parmi les 36 résultats possibles, 9 sont composés de 2 nombres impairs (ce sont les éléments de l'ensemble $\{1, 3, 5\}^2$).
   - La probabilité de faire au moins un nombre impair en deux jets est donc $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
   - La probabilité de faire aucun multiple de trois en trois jets est $(\frac{2}{3})^3 = \frac{8}{27}$.
   - La probabilité de faire au moins un multiple de trois en trois jets est donc $1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$.

   Comme $3 \cdot 27 > 80 > 4 \cdot 19$, on a $\frac{3}{4} > \frac{19}{27}$, donc il est plus probable de faire au moins un nombre pair en deux jets.
4. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, soit A_k l'événement « faire k fois 2 et $n - k$ fois 1 ». On a
$$\mathrm{Card}(A_k) = \binom{n}{k}$$
   car c'est le nombre d'arrangements de k nombres 2 et $n - k$ nombres 1 (permutations avec répétition de ces nombres). Par conséquent,
$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - 1 = (1+1)^n - 1 = 2^n - 1$$
   par la formule du binôme. Il suit que $\mathbb{P}(A) = \frac{2^n - 1}{6^n}$.

Exercice 5 (4 points)**.**

Notons R_i l'événement « tirer une boule rouge au $i$ème tirage», et B_i l'événement « tirer une boule blanche au $i$ème tirage».

1. On a $\mathbb{P}(R_1) = \frac{1}{2}$.
2. On a $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, et $\mathbb{P}(B_1 \cap R_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Par conséquent,
$$\mathbb{P}(R_2) = \mathbb{P}(R_1 \cap R_2) + \mathbb{P}(B_1 \cap R_2) = \frac{1}{2} \; .$$
3. Selon le même principe, on trouve
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_3) &= \mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3) + \mathbb{P}(R_1 \cap B_2 \cap R_3) + \mathbb{P}(B_1 \cap R_2 \cap R_3) + \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap R_3) \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{4} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{4} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{4} \\ &= \tfrac{1}{2} \; .\end{aligned}$$
4. On a déjà calculé $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.
La probabilité de tirer deux rouges et une blanche vaut quant à elle
$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap B_3) + \mathbb{P}(R_1 \cap B_2 \cap R_3) + \mathbb{P}(B_1 \cap R_2 \cap R_3) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{4} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{4} = \tfrac{1}{4} \; .$$
Remarque : Par symétrie, la probabilité de tirer une rouge et deux blanches, et celle de tirer trois blanches, valent chacune également $\frac{1}{4}$.