Licence 2 d'Informatique – Probabilités

Contrôle continu du 26 février 2024

Durée: 2 heures
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.
Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.
Les téléphones portables, ordinateurs, tablettes et autres appareils électroniques doivent être éteints.
Les points sont donnés à titre indicatif.

Exercice 1 (4 points)**.**

1. Soient E, F des ensembles finis, et $f : E \to F$ une application. Définir
   (a) f est injective;
   (b) f est surjective;
   (c) f est bijective.
2. Soit $n \geqslant 2$ un entier. On rappelle que si $k \in \mathbb{Z}$, alors $k \pmod n$ est le reste de la division euclidienne de k par n, c'est-à-dire l'unique entier $r \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que $k - r$ soit multiple de n.
   On pose $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, et on définit une application $f : E \to E$ par
   $$f(x) = 2x \pmod 5 .$$
   (a) Calculer $f(x)$ pour tout $x \in E$.
   (b) f est-elle surjective ? injective ? bijective ?
3. On pose maintenant $E = \{0, 1, 2, 3\}$, et on définit une application $f : E \to E$ par
   $$f(x) = 2x \pmod 4 .$$
   (a) Calculer $f(x)$ pour tout $x \in E$.
   (b) f est-elle surjective ? injective ? bijective ?

Exercice 2 (4 points)**.**

Le digicode d'une porte est composé de 4 chiffres (compris entre 0 et 9), suivis de 2 lettres parmi A et B. Les résultats des questions suivantes peuvent être donnés sous la forme de produit de nombres entiers.

1. Quel est le nombre de codes possibles ?
2. Combien y a-t-il de codes dont tous les chiffres sont différents ? (Les deux lettres peuvent être les mêmes.)
3. Gaston a oublié son code. Toutefois, il se souvient que le code a deux chiffres identiques, les autres chiffres étant différents de ce chiffre et différents entre eux. Combien de digicodes doit-il essayer ?
4. Gaston s'est rappelé que les chiffres identiques sont des 7, et que son code contient au moins un A. Combien de codes doit-il essayer ?

Exercice 3 (4 points)**.**

1. Donner la définition d'un espace probabilisé discret (Ω, p).
2. Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. On suppose que (Ω, p) est un espace probabilisé discret, avec
$$p(1) = \frac{1}{7}\ , \qquad p(2) = \frac{2}{7}\ , \qquad p(3) = \frac{3}{7}\ .$$
Que vaut $p(4)$?
3. Julie possède une paire de chaussettes bleues, une paire de chaussettes rouges et une paire de chaussettes vertes. Le matin, elle choisit sans regarder deux chaussettes.
Proposer un espace probabilisé discret permettant de modéliser cette situation. Quelle est la probabilité que Julie ait choisit deux chaussettes assorties (de même couleur) ?

Exercice 4 (4 points)**.**

1. Proposer un espace probabilisé permettant de décrire le jet de n dés. Les dés sont supposés parfaitement symétriques.
2. On lance 2 dés. Quelle est la probabilité que le plus grand nombre obtenu soit 3 ?
3. Est-il plus probable d'obtenir au moins un nombre pair en lançant 2 dés, ou au moins un multiple de 3 en lançant 3 dés ?
4. On lance n dés, avec $n \geqslant 2$. Quelle est la probabilité que le plus grand nombre obtenu soit 2 ?

Exercice 5 (4 points)**.**

Une urne contient initialement une boule rouge et une boule blanche. Les boules sont indiscernables au toucher. On tire alors une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne, en ajoutant une boule de la même couleur. On répète ce procédé 3 fois de suite.

1. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit rouge ?
2. Quelle est la probabilité que la deuxème boule tirée soit rouge ?
3. Quelle est la probabilité que la troisième boule tirée soit rouge ?
4. Quelle est la probabilité de tirer trois boules rouges en tout ? Quelle est celle de tirer deux boules rouges et une blanche, dans n'importe quel ordre ?