

Journées de Probabilités

# Structures de régularité et mécanique statistique

Nils Berglund

MAPMO, Université d'Orléans

Aussois, 23 juin 2017

avec Christian Kuehn (TU Munich)

# EDPS de type Allen–Cahn fractionnaire

$$\partial_t u = -(-\Delta)^{\rho/2} u + F(u) + \xi$$

# EDPS de type Allen–Cahn fractionnaire

$$\partial_t u = -(-\Delta)^{\rho/2} u + F(u) + \xi$$

- ▷  $u = u(t, x) \in \mathbb{R}$ ,  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^d$ ,  $d \geq 1$
- ▷  $-(-\Delta)^{\rho/2} =: \Delta^{\rho/2}$ : Laplacien fractionnaire
- ▷  $F$  polynome de degré  $N$
- ▷  $\xi$  bruit blanc espace-temps:  $\mathbb{E}[\xi(t, x)\xi(y, s)] = \delta(x - y)\delta(t - s)$   
 $\langle \xi, \varphi \rangle = W_\varphi \sim \mathcal{N}(0, \|\varphi\|_{L^2}^2)$ ,  $\mathbb{E}[W_\varphi W_{\varphi'}] = \langle \varphi, \varphi' \rangle$

# EDPS de type Allen–Cahn fractionnaire

$$\partial_t u = -(-\Delta)^{\rho/2} u + F(u) + \xi$$

- ▷  $u = u(t, x) \in \mathbb{R}$ ,  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^d$ ,  $d \geq 1$
- ▷  $-(-\Delta)^{\rho/2} =: \Delta^{\rho/2}$ : Laplacien fractionnaire
- ▷  $F$  polynome de degré  $N$
- ▷  $\xi$  bruit blanc espace-temps:  $\mathbb{E}[\xi(t, x)\xi(y, s)] = \delta(x - y)\delta(t - s)$   
 $\langle \xi, \varphi \rangle = W_\varphi \sim \mathcal{N}(0, \|\varphi\|_{L^2}^2)$ ,  $\mathbb{E}[W_\varphi W_{\varphi'}] = \langle \varphi, \varphi' \rangle$

Motivations:

- ▷ Meilleure compréhension de la sous-criticalité locale
- ▷ Equation de FitzHugh–Nagumo [B, Kuehn, EJP 2016]

$$\begin{aligned}\partial_t u &= \Delta u + u - u^3 + v + \xi \\ \partial_t v &= a_1 u + a_2 v\end{aligned}$$

# EDPS de type Allen–Cahn fractionnaire

$$\partial_t u = -(-\Delta)^{\rho/2} u + F(u) + \xi$$

- ▷  $u = u(t, x) \in \mathbb{R}$ ,  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^d$ ,  $d \geq 1$
- ▷  $-(-\Delta)^{\rho/2} =: \Delta^{\rho/2}$ : Laplacien fractionnaire
- ▷  $F$  polynome de degré  $N$
- ▷  $\xi$  bruit blanc espace-temps:  $\mathbb{E}[\xi(t, x)\xi(y, s)] = \delta(x - y)\delta(t - s)$   
 $\langle \xi, \varphi \rangle = W_\varphi \sim \mathcal{N}(0, \|\varphi\|_{L^2}^2)$ ,  $\mathbb{E}[W_\varphi W_{\varphi'}] = \langle \varphi, \varphi' \rangle$

Motivations:

- ▷ Meilleure compréhension de la sous-criticalité locale
- ▷ Equation de FitzHugh–Nagumo [B, Kuehn, EJP 2016]

$$\partial_t u = \Delta u + u - u^3 + v + \xi$$

$$\partial_t v = \delta \Delta v + a_1 u + a_2 v$$

# EDPS de type Allen–Cahn fractionnaire

$$\partial_t u = -(-\Delta)^{\rho/2} u + F(u) + \xi$$

- ▷  $u = u(t, x) \in \mathbb{R}$ ,  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^d$ ,  $d \geq 1$
- ▷  $-(-\Delta)^{\rho/2} =: \Delta^{\rho/2}$ : Laplacien fractionnaire
- ▷  $F$  polynome de degré  $N$
- ▷  $\xi$  bruit blanc espace-temps:  $\mathbb{E}[\xi(t, x)\xi(y, s)] = \delta(x - y)\delta(t - s)$   
 $\langle \xi, \varphi \rangle = W_\varphi \sim \mathcal{N}(0, \|\varphi\|_{L^2}^2)$ ,  $\mathbb{E}[W_\varphi W_{\varphi'}] = \langle \varphi, \varphi' \rangle$

Motivations:

- ▷ Meilleure compréhension de la sous-criticalité locale
- ▷ Equation de FitzHugh–Nagumo [B, Kuehn, EJP 2016]

$$\partial_t u = \Delta u + u - u^3 + v + \xi$$

$$\partial_t v = \Delta^{\rho/2} v + a_1 u + a_2 v$$

## Cas $\rho = 2, N = 3$

$$\text{Modèle } \Phi_d^4: \quad \partial_t u = \Delta u - u^3 + \xi$$

## Cas $\rho = 2, N = 3$

$$\text{Modèle } \Phi_d^4: \quad \partial_t u = \Delta u - u^3 + \xi$$

Bruit mollifié:  $\xi^\varepsilon = \varrho_\varepsilon * \xi$

avec  $\varrho_\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\varepsilon^{d+2}} \varrho\left(\frac{t}{\varepsilon^2}, \frac{x}{\varepsilon}\right)$  où  $\varrho$  à support compact, intégrale 1

Théorème

$d \in \{2, 3\}$ .  $\exists$  choix de const de renormalisation  $C(\varepsilon)$ ,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C(\varepsilon) = \infty$ ,

$$\partial_t u^\varepsilon = \Delta u^\varepsilon + C(\varepsilon) u^\varepsilon - (u^\varepsilon)^3 + \xi^\varepsilon$$

admet une suite  $u^\varepsilon$  de solutions locales, convergeant en proba vers une limite  $u$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .



## Cas $\rho = 2, N = 3$

$$\text{Modèle } \Phi_d^4: \quad \partial_t u = \Delta u - u^3 + \xi$$

Bruit mollifié:  $\xi^\varepsilon = \varrho_\varepsilon * \xi$

avec  $\varrho_\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\varepsilon^{d+2}} \varrho\left(\frac{t}{\varepsilon^2}, \frac{x}{\varepsilon}\right)$  où  $\varrho$  à support compact, intégrale 1

Théorème

$d \in \{2, 3\}$ .  $\exists$  choix de const de renormalisation  $C(\varepsilon)$ ,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C(\varepsilon) = \infty$ ,

$$\partial_t u^\varepsilon = \Delta u^\varepsilon + C(\varepsilon) u^\varepsilon - (u^\varepsilon)^3 + \xi^\varepsilon$$

admet une suite  $u^\varepsilon$  de solutions locales, convergeant en proba vers une limite  $u$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

- ▷  $d = 2$ : [Da Prato & Debussche 2004]  $C(\varepsilon) = C_1 \log(\varepsilon^{-1})$
- ▷  $d = 3$ : [Hairer 2014, aussi Catellier & Chouk, Kupiainen]  
 $C(\varepsilon) = C_1 \varepsilon^{-1} + C_2 \log(\varepsilon^{-1}) + C_3$

# Pourquoi faut-il renormaliser?

▷  $(\partial_t - \Delta)u = h \quad \Rightarrow \quad u = G * h$

▷  $(\partial_t - \Delta)u = F(u) + \xi \quad \Rightarrow \quad u = G * \xi + G * F(u)$

Quel espace fonctionnel choisir?

# Pourquoi faut-il renormaliser?

$$\triangleright (\partial_t - \Delta)u = h \quad \Rightarrow \quad u = G * h$$

$$\triangleright (\partial_t - \Delta)u = F(u) + \xi \quad \Rightarrow \quad u = G * \xi + G * F(u)$$

Quel espace fonctionnel choisir?

Espaces de Hölder  $\mathcal{C}^\alpha$  pour  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $I \subset \mathbb{R}$  intervalle compact:

$$\triangleright 0 < \alpha < 1: |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha \quad \forall x \neq y$$

$$\triangleright \alpha > 1: f \in \mathcal{C}^{[\alpha]} \text{ et } f' \in \mathcal{C}^{\alpha-1} \not\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$$

$$\triangleright \alpha < 0: f \text{ distribution, } |\langle f, \eta_x^\delta \rangle| \leq C\delta^\alpha \text{ avec } \eta_x^\delta(y) = \frac{1}{\delta} \eta\left(\frac{x-y}{\delta}\right)$$

# Pourquoi faut-il renormaliser?

$$\triangleright (\partial_t - \Delta)u = h \quad \Rightarrow \quad u = G * h$$

$$\triangleright (\partial_t - \Delta)u = F(u) + \xi \quad \Rightarrow \quad u = G * \xi + G * F(u)$$

Quel espace fonctionnel choisir?

Espaces de Hölder  $\mathcal{C}^\alpha$  pour  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $I \subset \mathbb{R}$  intervalle compact:

$$\triangleright 0 < \alpha < 1: |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha \quad \forall x \neq y$$

$$\triangleright \alpha > 1: f \in \mathcal{C}^{[\alpha]} \text{ et } f' \in \mathcal{C}^{\alpha-1} \not\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$$

$$\triangleright \alpha < 0: f \text{ distribution, } |\langle f, \eta_x^\delta \rangle| \leq C\delta^\alpha \text{ avec } \eta_x^\delta(y) = \frac{1}{\delta} \eta\left(\frac{x-y}{\delta}\right)$$

Scaling parabolique  $\mathcal{C}_s^\alpha$ :  $|x - y| \longrightarrow |t - s|^{1/2} + \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|$

Faits:

$$1. \alpha \notin \mathbb{Z}, f \in \mathcal{C}_s^\alpha \quad \Rightarrow \quad G * f \in \mathcal{C}_s^{\alpha+2} \quad (\text{Schauder})$$

$$2. \xi \in \mathcal{C}_s^\alpha \text{ p.s. } \forall \alpha < -\frac{d+2}{2}$$

# Pourquoi faut-il renormaliser?

$$\triangleright (\partial_t - \Delta)u = h \quad \Rightarrow \quad u = G * h$$

$$\triangleright (\partial_t - \Delta)u = F(u) + \xi \quad \Rightarrow \quad u = G * \xi + G * F(u)$$

Quel espace fonctionnel choisir?

Espaces de Hölder  $\mathcal{C}^\alpha$  pour  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $I \subset \mathbb{R}$  intervalle compact:

$$\triangleright 0 < \alpha < 1: |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha \quad \forall x \neq y$$

$$\triangleright \alpha > 1: f \in \mathcal{C}^{[\alpha]} \text{ et } f' \in \mathcal{C}^{\alpha-1} \not\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$$

$$\triangleright \alpha < 0: f \text{ distribution, } |\langle f, \eta_x^\delta \rangle| \leq C\delta^\alpha \text{ avec } \eta_x^\delta(y) = \frac{1}{\delta}\eta\left(\frac{x-y}{\delta}\right)$$

Scaling parabolique  $\mathcal{C}_s^\alpha$ :  $|x - y| \longrightarrow |t - s|^{1/2} + \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|$

Faits:

$$1. \alpha \notin \mathbb{Z}, f \in \mathcal{C}_s^\alpha \quad \Rightarrow \quad G * f \in \mathcal{C}_s^{\alpha+2} \quad (\text{Schauder})$$

$$2. \xi \in \mathcal{C}_s^\alpha \text{ p.s. } \forall \alpha < -\frac{d+2}{2}$$

Conséquence:  $G * \xi \in \mathcal{C}_s^\alpha$  p.s.  $\forall \alpha < \frac{2-d}{2} \leq 0$  pour  $d \geq 2$

# Structures de régularité

[Hairer, Inventiones Math. **198**, 269–504, 2014]:

$$\begin{array}{ccc} (u_0, Z^\varepsilon) & \xrightarrow{\mathcal{S}} & U \\ \uparrow \Psi & & \downarrow \mathcal{R} \\ (u_0, \xi^\varepsilon) & \xrightarrow{\bar{\mathcal{S}}} & u^\varepsilon \end{array}$$

# Structures de régularité

[Hairer, Inventiones Math. **198**, 269–504, 2014]:

$$\begin{array}{ccc} (u_0, Z^\varepsilon) & \xrightarrow{\mathcal{S}} & U \\ \uparrow \Psi & & \downarrow \mathcal{R} \\ (u_0, \xi^\varepsilon) & \xrightarrow{\bar{\mathcal{S}}} & u^\varepsilon \end{array}$$

$$u = G * (\xi^\varepsilon - u^3) \quad \Rightarrow \quad U = \mathcal{I}(\Xi - U^3) + \varphi \mathbf{1} + \text{termes polynomiaux}$$

$$U_0 = 0$$

$$U_1 = \mathcal{I}(\Xi) + \varphi \mathbf{1} + \dots \quad U_1^3 = \mathcal{I}(\Xi)^3 + 3\varphi \mathcal{I}(\Xi)^2 + 3\varphi^2 \mathcal{I}(\Xi) + \varphi^3 \mathbf{1} + \dots$$

# Structures de régularité

[Hairer, Inventiones Math. **198**, 269–504, 2014]:

$$\begin{array}{ccc} (u_0, Z^\varepsilon) & \xrightarrow{\mathcal{S}} & U \\ \uparrow \Psi & & \downarrow \mathcal{R} \\ (u_0, \xi^\varepsilon) & \xrightarrow{\bar{\mathcal{S}}} & u^\varepsilon \end{array}$$

$$u = G * (\xi^\varepsilon - u^3) \quad \Rightarrow \quad U = \mathcal{I}(\Xi - U^3) + \varphi \mathbf{1} + \text{termes polynomiaux}$$

$$U_0 = 0$$

$$U_1 = \mathcal{I}(\Xi) + \varphi \mathbf{1} + \dots \quad U_1^3 = \mathcal{I}(\Xi)^3 + 3\varphi \mathcal{I}(\Xi)^2 + 3\varphi^2 \mathcal{I}(\Xi) + \varphi^3 \mathbf{1} + \dots$$

$$U_2 = \mathcal{I}(\Xi) - \mathcal{I}(\mathcal{I}(\Xi)^3) - 3\varphi \mathcal{I}(\mathcal{I}(\Xi)^2) - 3\varphi^2 \mathcal{I}(\mathcal{I}(\Xi)) + \varphi \mathbf{1} + \dots$$



# Structures de régularité

[Hairer, Inventiones Math. **198**, 269–504, 2014]:

$$\begin{array}{ccc}
 (u_0, Z^\varepsilon) & \xrightarrow{\mathcal{S}} & U \\
 \uparrow \Psi & & \downarrow \mathcal{R} \\
 (u_0, \xi^\varepsilon) & \xrightarrow{\bar{\mathcal{S}}} & u^\varepsilon
 \end{array}$$

$$u = G * (\xi^\varepsilon - u^3) \quad \Rightarrow \quad U = \mathcal{I}(\Xi - U^3) + \varphi \mathbf{1} + \text{termes polynomiaux}$$

$$U_0 = 0$$

$$U_1 = \mathcal{I}(\Xi) + \varphi \mathbf{1} + \dots \quad U_1^3 = \mathcal{I}(\Xi)^3 + 3\varphi \mathcal{I}(\Xi)^2 + 3\varphi^2 \mathcal{I}(\Xi) + \varphi^3 \mathbf{1} + \dots$$

$$U_2 = \mathcal{I}(\Xi) - \mathcal{I}(\mathcal{I}(\Xi)^3) - 3\varphi \mathcal{I}(\mathcal{I}(\Xi)^2) - 3\varphi^2 \mathcal{I}(\mathcal{I}(\Xi)) + \varphi \mathbf{1} + \dots$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 =: & \uparrow & - & \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} & - & 3\varphi \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array} & - & 3\varphi^2 \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array} & + & \varphi \mathbf{1} + \dots
 \end{array}$$

# Structures de régularité

[Hairer, Inventiones Math. **198**, 269–504, 2014]:

$$\begin{array}{ccc}
 (u_0, Z^\varepsilon) & \xrightarrow{\mathcal{S}} & U \\
 \uparrow \Psi & & \downarrow \mathcal{R} \\
 (u_0, \xi^\varepsilon) & \xrightarrow{\bar{\mathcal{S}}} & u^\varepsilon
 \end{array}$$

$$u = G * (\xi^\varepsilon - u^3) \Rightarrow U = \mathcal{I}(\Xi - U^3) + \varphi \mathbf{1} + \text{termes polynomiaux}$$

$$U_0 = 0$$

$$U_1 = \mathcal{I}(\Xi) + \varphi \mathbf{1} + \dots \quad U_1^3 = \mathcal{I}(\Xi)^3 + 3\varphi \mathcal{I}(\Xi)^2 + 3\varphi^2 \mathcal{I}(\Xi) + \varphi^3 \mathbf{1} + \dots$$

$$U_2 = \mathcal{I}(\Xi) - \mathcal{I}(\mathcal{I}(\Xi)^3) - 3\varphi \mathcal{I}(\mathcal{I}(\Xi)^2) - 3\varphi^2 \mathcal{I}(\mathcal{I}(\Xi)) + \varphi \mathbf{1} + \dots$$

$$\begin{array}{cccccc}
 =: & \uparrow & - & \uparrow \uparrow & - & 3\varphi \uparrow \uparrow & - & 3\varphi^2 \uparrow & + & \varphi \mathbf{1} + \dots \\
 & 1 - \frac{d}{2} & & 5 - \frac{3d}{2} & & 4 - d & & 3 - \frac{d}{2} & & 0
 \end{array}$$

Localement sous-critique: les exposants de Hölder sont bornés inf

## Cas du Laplacien fractionnaire

$0 < \rho < 2$ ,  $\Delta^{\rho/2} := -(-\Delta)^{\rho/2}$  générateur d'un processus de Lévy de noyau

$$G_{\rho}(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i x \cdot \xi} e^{-t \|\xi\|^{\rho}} d\xi$$

# Cas du Laplacien fractionnaire

$0 < \rho < 2$ ,  $\Delta^{\rho/2} := -(-\Delta)^{\rho/2}$  générateur d'un processus de Lévy de noyau

$$G_\rho(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i x \cdot \xi} e^{-t \|\xi\|^\rho} d\xi$$

Facile à vérifier:

1.  $\mathfrak{s} = (\rho, 1, \dots, 1) \Rightarrow G_\rho$  régularisant d'ordre  $\rho$ :

$$f \in \mathcal{C}_s^\alpha, \alpha + \rho \notin \mathbb{Z} \Rightarrow G_\rho * f \in \mathcal{C}_s^{\alpha+\rho}$$

# Cas du Laplacien fractionnaire

$0 < \rho < 2$ ,  $\Delta^{\rho/2} := -(-\Delta)^{\rho/2}$  générateur d'un processus de Lévy de noyau

$$G_\rho(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i x \cdot \xi} e^{-t \|\xi\|^\rho} d\xi$$

Facile à vérifier:

1.  $\mathfrak{s} = (\rho, 1, \dots, 1) \Rightarrow G_\rho$  régularisant d'ordre  $\rho$ :

$$f \in \mathcal{C}_s^\alpha, \alpha + \rho \notin \mathbb{Z} \Rightarrow G_\rho * f \in \mathcal{C}_s^{\alpha+\rho}$$

2.  $\xi \in \mathcal{C}_s^\alpha$  p.s.  $\forall \alpha < -\frac{\rho+d}{2}$

# Cas du Laplacien fractionnaire

$0 < \rho < 2$ ,  $\Delta^{\rho/2} := -(-\Delta)^{\rho/2}$  générateur d'un processus de Lévy de noyau

$$G_\rho(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i x \cdot \xi} e^{-t \|\xi\|^\rho} d\xi$$

Facile à vérifier:

1.  $\mathfrak{s} = (\rho, 1, \dots, 1) \Rightarrow G_\rho$  régularisant d'ordre  $\rho$ :

$$f \in \mathcal{C}_s^\alpha, \alpha + \rho \notin \mathbb{Z} \Rightarrow G_\rho * f \in \mathcal{C}_s^{\alpha+\rho}$$

2.  $\xi \in \mathcal{C}_s^\alpha$  p.s.  $\forall \alpha < -\frac{\rho+d}{2}$

3.  $\partial_t u = \Delta^{\rho/2} u + \underbrace{F(u)}_{\text{degré } N} + \xi$  loc. sous-critique  $\Leftrightarrow \rho > \rho_c = d \frac{N-1}{N+1}$

# Cas du Laplacien fractionnaire

$0 < \rho < 2$ ,  $\Delta^{\rho/2} := -(-\Delta)^{\rho/2}$  générateur d'un processus de Lévy de noyau

$$G_\rho(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i x \cdot \xi} e^{-t \|\xi\|^\rho} d\xi$$

Facile à vérifier:

1.  $\mathfrak{s} = (\rho, 1, \dots, 1) \Rightarrow G_\rho$  régularisant d'ordre  $\rho$ :

$$f \in C_{\mathfrak{s}}^\alpha, \alpha + \rho \notin \mathbb{Z} \Rightarrow G_\rho * f \in C_{\mathfrak{s}}^{\alpha+\rho}$$

2.  $\xi \in C_{\mathfrak{s}}^\alpha$  p.s.  $\forall \alpha < -\frac{\rho+d}{2}$

3.  $\partial_t u = \underbrace{\Delta^{\rho/2} u + F(u)}_{\text{degré } N} + \xi$  loc. sous-critique  $\Leftrightarrow \rho > \rho_c = d \frac{N-1}{N+1}$

Idée: Equ de point fixe  $U = \mathcal{I}(\Xi + F(U)) + \varphi \mathbf{1} + \dots$

$$|\Xi|_{\mathfrak{s}} = -\frac{\rho+d}{2} - \kappa =: \alpha_0$$

$$|\mathcal{I}(\Xi)^N|_{\mathfrak{s}} = N(\alpha_0 + \rho) = \frac{N}{2}(\rho - d) - N\kappa$$

$$|\mathcal{I}(\Xi)^N|_{\mathfrak{s}} > |\Xi|_{\mathfrak{s}} \Leftrightarrow \rho > \rho_c$$

puis récurrence sur l'application du point fixe

# Espace modèle

$$U = \mathcal{I}(\Xi + F(U)) + \varphi \mathbf{1} + \dots$$

- ▷  $\mathcal{U}_F$ : symboles représentant la solution  $U$
- ▷  $\mathcal{F}_F \supset \mathcal{U}_F$ : symboles représentant l'équation (i.e.  $\Xi + F(U)$ )



# Espace modèle

$$U = \mathcal{I}(\Xi + F(U)) + \varphi \mathbf{1} + \dots$$

- ▷  $\mathcal{U}_F$ : symboles représentant la solution  $U$
- ▷  $\mathcal{F}_F \supset \mathcal{U}_F$ : symboles représentant l'équation (i.e.  $\Xi + F(U)$ )

donnés par la récurrence  $\mathcal{W}_0 = \mathcal{U}_0 = \emptyset$  et

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_m &= \mathcal{W}_{m-1} \cup \mathcal{U}_{m-1} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{m-1}^N \cup \{\Xi\} \\ \mathcal{U}_m &= \mathcal{I}(\mathcal{W}_m) \cup \{X^k\}\end{aligned}$$

avec  $AB := \{\tau\tau' : \tau \in A, \tau' \in B\}$

$$\text{Alors } \mathcal{U}_F = \bigcup_{m \geq 0} \mathcal{U}_m, \quad \mathcal{F}_F = \bigcup_{m \geq 0} (\mathcal{W}_m \cup \mathcal{U}_m)$$

# Espace modèle

$$U = \mathcal{I}(\Xi + F(U)) + \varphi \mathbf{1} + \dots$$

- ▷  $\mathcal{U}_F$ : symboles représentant la solution  $U$
- ▷  $\mathcal{F}_F \supset \mathcal{U}_F$ : symboles représentant l'équation (i.e.  $\Xi + F(U)$ )

donnés par la récurrence  $\mathcal{W}_0 = \mathcal{U}_0 = \emptyset$  et

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_m &= \mathcal{W}_{m-1} \cup \mathcal{U}_{m-1} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{m-1}^N \cup \{\Xi\} \\ \mathcal{U}_m &= \mathcal{I}(\mathcal{W}_m) \cup \{X^k\}\end{aligned}$$

avec  $AB := \{\tau\tau' : \tau \in A, \tau' \in B\}$

$$\text{Alors } \mathcal{U}_F = \bigcup_{m \geq 0} \mathcal{U}_m, \quad \mathcal{F}_F = \bigcup_{m \geq 0} (\mathcal{W}_m \cup \mathcal{U}_m)$$

**Questions:** Soit  $\mathcal{A}_F = \{|\tau|_s : \tau \in \mathcal{F}_F\}$

1. Estimer  $h_F = \#(\mathcal{A}_F \cup \mathbb{R}_-)$  (nombre d'exposants de Hölder négatifs)
2. Estimer  $c_F = \#\{\tau \in \mathcal{F}_F : |\tau|_s < 0\}$  (nombre de symboles singuliers)

# Nombre d'exposants de Hölder négatifs

$$h_F = \#(\mathcal{A}_F \cup \mathbb{R}_-)$$

Théorème 1

$$\frac{\rho + d}{N + 1} \frac{1}{\rho - \rho_c} \leq h_F \leq 1 + \frac{(\rho + d)dN}{N + 1} \frac{1}{\rho - \rho_c}$$

# Nombre d'exposants de Hölder négatifs

$$h_F = \#(\mathcal{A}_F \cup \mathbb{R}_-)$$

Théorème 1

$$\frac{\rho + d}{N + 1} \frac{1}{\rho - \rho_c} \leq h_F \leq 1 + \frac{(\rho + d)dN}{N + 1} \frac{1}{\rho - \rho_c}$$

Preuve:

$$|\tau|_s = -\frac{\rho+d}{2}p(\tau) + q(\tau)\rho + |k|_s(\tau) - \mathcal{O}(\kappa)$$

$$\rho = \#\Xi, \quad q = \#\mathcal{I}, \quad 0 \leq |k|_s = \text{exp. polynomial}$$

- ▷  $D_0(\mathcal{U}) = \{(p(\tau), q(\tau)) : \tau \in \mathcal{U}\} \subset \mathbb{N}^2$
- ▷  $D_0(\mathcal{U}^n) = \text{env. convexe de } nD_0(\mathcal{U})$

# Nombre d'exposants de Hölder négatifs

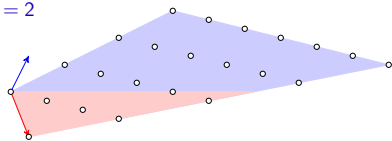
$$h_F = \#(\mathcal{A}_F \cup \mathbb{R}_-)$$

Théorème 1

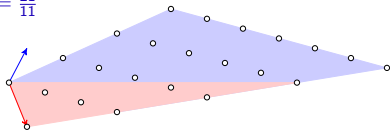
$$\frac{\rho + d}{N + 1} \frac{1}{\rho - \rho_c} \leq h_F \leq 1 + \frac{(\rho + d)dN}{N + 1} \frac{1}{\rho - \rho_c}$$

$D_0(\mathcal{W}_3)$  pour  $N = d = 3$

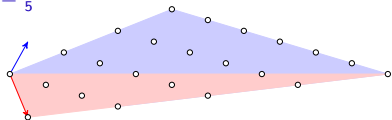
$$\rho = 2$$



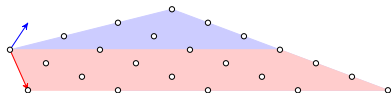
$$\rho = \frac{21}{11}$$



$$\rho = \frac{9}{5}$$



$$\rho = \rho_c = \frac{3}{2}$$



# Nombre d'exposants de Hölder négatifs

$$h_F = \#(\mathcal{A}_F \cup \mathbb{R}_-)$$

Théorème 1

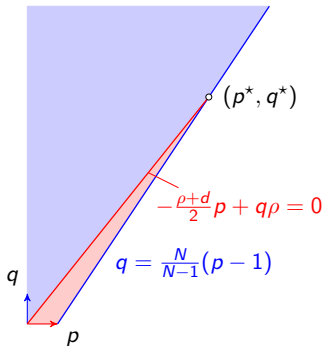
$$\frac{\rho + d}{N + 1} \frac{1}{\rho - \rho_c} \leq h_F \leq 1 + \frac{(\rho + d)dN}{N + 1} \frac{1}{\rho - \rho_c}$$

Preuve:

$$|\tau|_s = -\frac{\rho+d}{2}p(\tau) + q(\tau)\rho + |k|_s(\tau) - \mathcal{O}(\kappa)$$

$$p = \#\Xi, q = \#\mathcal{I}, 0 \leq |k|_s = \text{exp. polynomial}$$

- ▷  $D_0(\mathcal{U}) = \{(p(\tau), q(\tau)) : \tau \in \mathcal{U}\} \subset \mathbb{N}^2$
- ▷  $D_0(\mathcal{U}^n) = \text{env. convexe de } nD_0(\mathcal{U})$
- ▷  $\lim_{m \rightarrow \infty} D_0(\mathcal{U}_m) = \text{cône tronqué}$
- ▷  $|\tau|_s < 0 \Rightarrow p = 1 + \left\lfloor \frac{N-1}{N} q \right\rfloor$  et  $\tau \in \text{triangle}$
- ▷  $h_F = \text{nombre de points dans le triangle}$
- ▷  $q^* = \frac{(\rho+d)N}{(N+1)(\rho-\rho_c)} + \mathcal{O}(\kappa)$



# Nombre de symboles

$$c_F = \#\{\tau \in \mathcal{F}_F : |\tau|_s < 0\}$$

Théorème 2

$$C_N^-(\rho - \rho_c)^{3/2} e^{\beta_N d / (\rho - \rho_c)} \leq c_F \leq C_N^+(\rho - \rho_c)^{3/2} e^{\beta_N d / (\rho - \rho_c)}$$

# Nombre de symboles

$$c_F = \#\{\tau \in \mathcal{F}_F : |\tau|_s < 0\}$$

Théorème 2

$$C_N^-(\rho - \rho_c)^{3/2} e^{\beta_N d / (\rho - \rho_c)} \leq c_F \leq C_N^+(\rho - \rho_c)^{3/2} e^{\beta_N d / (\rho - \rho_c)}$$

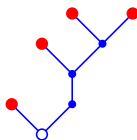
Cas  $N = 2$ :  $\tau \rightarrow$  arbre de degré  $\leq 3$ ,  $p$  feuilles,  $q$  arêtes

$d_i := \#$  sommets de degré  $i$

$$d_1 + d_2 + d_3 = q + 1$$

$$d_1 + 2d_2 + 3d_3 = 2q$$

$$d_1 = p + 1_{\{\text{deg } \emptyset = 1\}}$$





# Nombre de symboles

$$c_F = \#\{\tau \in \mathcal{F}_F : |\tau|_s < 0\}$$

Théorème 2

$$C_N^-(\rho - \rho_c)^{3/2} e^{\beta_N d / (\rho - \rho_c)} \leq c_F \leq C_N^+(\rho - \rho_c)^{3/2} e^{\beta_N d / (\rho - \rho_c)}$$

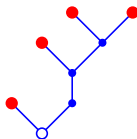
Cas  $N = 2$ :  $\tau \rightarrow$  arbre de degré  $\leq 3$ ,  $p$  feuilles,  $q$  arêtes

$d_i := \#$  sommets de degré  $i$

$$d_1 + d_2 + d_3 = q + 1$$

$$d_1 + 2d_2 + 3d_3 = 2q$$

$$d_1 = p + 1_{\{\text{deg } \emptyset = 1\}}$$



- ▷  $q = 2n \Rightarrow$  arbre binaire à  $q + 1$  sommets
- ▷  $q = 2n + 1 \Rightarrow$  arbre binaire à  $q + 2$  sommets moins une arête

# Nombre de symboles

$$c_F = \#\{\tau \in \mathcal{F}_F : |\tau|_s < 0\}$$

Théorème 2

$$C_N^-(\rho - \rho_c)^{3/2} e^{\beta_N d / (\rho - \rho_c)} \leq c_F \leq C_N^+(\rho - \rho_c)^{3/2} e^{\beta_N d / (\rho - \rho_c)}$$

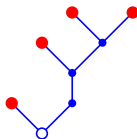
Cas  $N = 2$ :  $\tau \rightarrow$  arbre de degré  $\leq 3$ ,  $p$  feuilles,  $q$  arêtes

$d_i := \#$  sommets de degré  $i$

$$d_1 + d_2 + d_3 = q + 1$$

$$d_1 + 2d_2 + 3d_3 = 2q$$

$$d_1 = p + 1_{\{\text{deg } \emptyset = 1\}}$$



- ▷  $q = 2n \Rightarrow$  arbre binaire à  $q + 1$  sommets
- ▷  $q = 2n + 1 \Rightarrow$  arbre binaire à  $q + 2$  sommets moins une arête

⚠ On doit compter les arbres à homéomorphisme près

Nombres de Wedderburn–Etherington  $W_n \simeq c \frac{(1/0.4072\dots)^n}{n^{3/2}}$  [Otter 1948]

# Propriétés statistiques

$\Omega = \{\tau \in \mathcal{F}_F : |\tau|_S < 0\}$ ,  $\mathbb{P}$  probabilité uniforme

Propriétés de variables aléatoires  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  lorsque  $\rho \searrow \rho_c$ ?

# Propriétés statistiques

$\Omega = \{\tau \in \mathcal{F}_F : |\tau|_s < 0\}$ ,  $\mathbb{P}$  probabilité uniforme

Propriétés de variables aléatoires  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  lorsque  $\rho \searrow \rho_c$ ?

Cas  $X = Q = \#\mathcal{I}$ :

- ▷  $\mathbb{P}\{Q \notin \mathbb{N}\} \leq e^{-\gamma/(\rho - \rho_c)}$
- ▷  $\mathbb{E}[Q/q^*] = 1 + \mathcal{O}(\rho - \rho_c)$  et  $\text{Var}[Q/q^*] = \mathcal{O}((\rho - \rho_c)^2)$
- ▷  $-\lim_{\rho \searrow \rho_c} (\rho - \rho_c) \log \mathbb{P}\{Q/q^* \leq x\} = \beta_N d(1 - x) \quad \forall x \in [0, 1]$

# Propriétés statistiques

$\Omega = \{\tau \in \mathcal{F}_F : |\tau|_s < 0\}$ ,  $\mathbb{P}$  probabilité uniforme

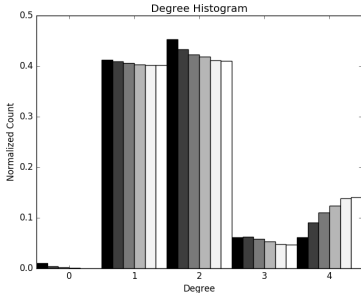
Propriétés de variables aléatoires  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  lorsque  $\rho \searrow \rho_c$ ?

Cas  $X = Q = \#\mathcal{I}$ :

- ▷  $\mathbb{P}\{Q \notin \mathbb{NN}\} \leq e^{-\gamma/(\rho - \rho_c)}$
- ▷  $\mathbb{E}[Q/q^*] = 1 + \mathcal{O}(\rho - \rho_c)$  et  $\text{Var}[Q/q^*] = \mathcal{O}((\rho - \rho_c)^2)$
- ▷  $-\lim_{\rho \searrow \rho_c} (\rho - \rho_c) \log \mathbb{P}\{Q/q^* \leq x\} = \beta_N d(1 - x) \quad \forall x \in [0, 1]$

Autres variables aléatoires intéressantes:

- ▷ Nombre  $P$  de  $\Xi$ : fonction de  $Q$
- ▷ Exposant de Hölder: concentré en  $0^-$
- ▷ Distribution de degrés: proche de  $(\frac{N-1}{N}, 0, \dots, 0, \frac{1}{N})$
- ▷ Hauteur et diamètre [Broutin & Flajolet]: d'ordre  $1/\sqrt{\rho - \rho_c}$



$N = d = 3, \rho \in \{1.8, 1.75, 1.7, 1.76, 1.6, 1.59\}$

# Renormalisation

$$\partial_t u^\varepsilon = \Delta^{\rho/2} u^\varepsilon + C(\varepsilon) u^\varepsilon - (u^\varepsilon)^3 + \xi^\varepsilon$$

# Renormalisation

$$\partial_t u^\varepsilon = \Delta^{\rho/2} u^\varepsilon + C(\varepsilon) u^\varepsilon - (u^\varepsilon)^3 + \xi^\varepsilon$$

Théorie BPHZ [Bruned, Hairer & Zambotti 2016, Chandra & Hairer 2016]:

On s'attend à

$$C(\varepsilon) \simeq \sum_{\tau \in \mathcal{F}_F: |\tau|_s < 0} \varepsilon^{|\tau|_s} \quad (\varepsilon^{0-} = \log(\varepsilon^{-1}))$$

# Renormalisation

$$\partial_t u^\varepsilon = \Delta^{\rho/2} u^\varepsilon + C(\varepsilon) u^\varepsilon - (u^\varepsilon)^3 + \xi^\varepsilon$$

Théorie BPHZ [Bruned, Hairer & Zambotti 2016, Chandra & Hairer 2016]:

On s'attend à

$$\begin{aligned} C(\varepsilon) &\simeq \sum_{\tau \in \mathcal{F}_F: |\tau|_s < 0} \varepsilon^{|\tau|_s} & (\varepsilon^{0-} = \log(\varepsilon^{-1})) \\ &= c_F \mathbb{E}[\varepsilon^{|\tau|_s}] \end{aligned}$$



# Renormalisation

$$\partial_t u^\varepsilon = \Delta^{\rho/2} u^\varepsilon + C(\varepsilon) u^\varepsilon - (u^\varepsilon)^3 + \xi^\varepsilon$$

Théorie BPHZ [Bruned, Hairer & Zambotti 2016, Chandra & Hairer 2016]:

On s'attend à

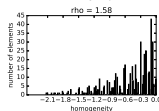
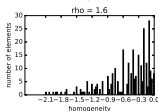
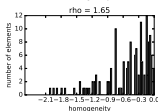
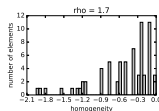
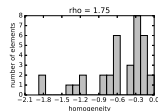
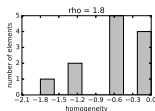
$$C(\varepsilon) \simeq \sum_{\tau \in \mathcal{F}_F: |\tau|_s < 0} \varepsilon^{|\tau|_s} \quad (\varepsilon^{0-} = \log(\varepsilon^{-1}))$$

$$= c_F \mathbb{E}[c^{|\tau|_s}]$$

$$\mathbb{P}\{|\tau|_s = -h\} \sim e^{-\gamma_N h / (\rho - \rho_c)}$$

$$\gamma_N = \frac{N+1}{N} \beta_N$$

$$-\frac{\rho+d}{2} < -h < 0$$



# Renormalisation

$$\partial_t u^\varepsilon = \Delta^{\rho/2} u^\varepsilon + C(\varepsilon) u^\varepsilon - (u^\varepsilon)^3 + \xi^\varepsilon$$

Théorie BPHZ [Bruned, Hairer & Zambotti 2016, Chandra & Hairer 2016]:

On s'attend à

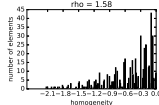
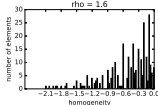
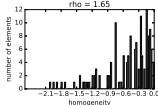
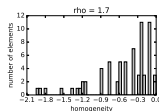
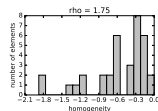
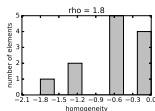
$$C(\varepsilon) \simeq \sum_{\tau \in \mathcal{F}_F: |\tau|_s < 0} \varepsilon^{|\tau|_s} \quad (\varepsilon^{0-} = \log(\varepsilon^{-1}))$$

$$= c_F \mathbb{E}[e^{|\tau|_s}]$$

$$\mathbb{P}\{|\tau|_s = -h\} \sim e^{-\gamma_N h / (\rho - \rho_c)}$$

$$\gamma_N = \frac{N+1}{N} \beta_N$$

$$-\frac{\rho+d}{2} < -h < 0$$



$$\Rightarrow C(\varepsilon) \sim \begin{cases} c_F \log(\varepsilon^{-1}) & \text{si } \varepsilon > e^{-\gamma_N / (\rho - \rho_c)} \\ c_F \left( \frac{\varepsilon}{e^{-\gamma_N / (\rho - \rho_c)}} \right)^{-(d-\rho)} & \text{si } \varepsilon < e^{-\gamma_N / (\rho - \rho_c)} \end{cases}$$

# Références

- ▷ M. Hairer, *A theory of regularity structures*, Inv. Math. **198**, 269–504 (2014)
  - ▷ M. Hairer, *Introduction to Regularity Structures*, lecture notes (2013)
  - ▷ A. Chandra, H. Weber, *Stochastic PDEs, regularity structures, and interacting particle systems*, Annales Mathématiques de la Faculté des Sciences de Toulouse (in press), [arXiv/1508.03616](https://arxiv.org/abs/1508.03616)
- 
- ▷ N. B., C. Kuehn, *Regularity structures and renormalisation of FitzHugh–Nagumo SPDEs in three space dimensions*, Elec J Prob 21 (18):1-48 (2016)
  - ▶ N. B., C. Kuehn, *Model spaces of regularity structures in space-fractional SPDEs*, J Statist Phys (online first), [arXiv/1701.03066](https://arxiv.org/abs/1701.03066)
- 
- ▷ Y. Bruned, M. Hairer, L. Zambotti, *Algebraic renormalisation of regularity structures*, [arXiv/1610.08468](https://arxiv.org/abs/1610.08468)
  - ▷ A. Chandra, M. Hairer, *An analytic BPHZ theorem for regularity structures*, [arXiv/1612.08138](https://arxiv.org/abs/1612.08138)
  - ▷ M. Hairer, *An analyst's take on the BPHZ theorem*, [arXiv/1704.08634](https://arxiv.org/abs/1704.08634)

# Publicité

## Au CIRM, Marseille, Luminy:

### CONFERENCE

#### Stochastic Partial Differential Equations

#### *Equations aux dérivées partielles stochastiques*

14 - 18 May, 2018

#### Scientific Committee

#### Comité scientifique

Sandra Cerrai (University of Maryland)  
Peter Friz (TU Berlin & WIAS)  
Etienne Pardoux (Aix-Marseille Université)

#### Organizing Committee

#### Comité d'organisation

Nils Berglund (Université d'Orléans)  
Arnaud Debussche (ENS Rennes)  
François Delarue ( Université Nice-Sophia Antipolis)  
Christian Kuehn (TU Munich)

#### Speakers

Dirk Blömker (Augsburg)  
Zdzislaw Brzezniak (York)  
Robert Dalang (EPF Lausanne)  
Anne De Bouard (Ecole Polytechnique)  
Franco Flandoli (Pisa)  
Benjamin Gess (MPI Leipzig)  
Massimiliano Gubinelli (Bonn)  
Istvan Gyöngy (Edinburgh)  
Martin Hairer (Warwick)  
Martina Hofmanova (TU Berlin)

Antti Kupiainen (Helsinki)  
Jonathan Mattingly (Duke)  
Jean-Christophe Mourrat (ENS Lyon)  
Felix Otto (MPI Leipzig)  
Michael Röckner (Bielefeld)  
Marta Sanz-Solé (Barcelona)  
Wilhelm Stannat (TU Berlin)  
Josef Teichmann (ETH Zürich)  
Hendrik Weber (Warwick)  
Maria Westdickenberg (RWTH Aachen)  
Lorenzo Zambotti (UPMC)