Journées de Probabilités

Structures de régularité et mécanique statistique

Nils Berglund

MAPMO, Université d'Orléans

Aussois, 23 juin 2017

avec Christian Kuehn (TU Munich)

EDPS de type Allen–Cahn fractionnaire

$$\partial_t u = -(-\Delta)^{\rho/2} u + F(u) + \xi$$

EDPS de type Allen–Cahn fractionnaire

$$\partial_t u = -(-\Delta)^{\rho/2} u + F(u) + \xi$$

- $u = u(t,x) \in \mathbb{R}$, $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^d$, $d \geqslant 1$
- $-(-\Delta)^{\rho/2} =: \Delta^{\rho/2}$: Laplacien fractionnaire
- F polynome de degré N
- ξ bruit blanc espace-temps: $\mathbb{E}[\xi(t,x)\xi(y,s)] = \delta(x-y)\delta(t-s)$
  $\langle \xi, \varphi \rangle = W_\varphi \sim \mathcal{N}(0, \|\varphi\|^2_{L^2})$, $\mathbb{E}[W_\varphi W_{\varphi'}] = \langle \varphi, \varphi' \rangle$

EDPS de type Allen–Cahn fractionnaire

$$\boxed{\partial_t u = -(-\Delta)^{\rho/2} u + F(u) + \xi}$$

- $u = u(t,x) \in \mathbb{R}$, $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^d$, $d \geqslant 1$
- $-(-\Delta)^{\rho/2} =: \Delta^{\rho/2}$: Laplacien fractionnaire
- F polynome de degré N
- ξ bruit blanc espace-temps: $\mathbb{E}[\xi(t,x)\xi(y,s)] = \delta(x-y)\delta(t-s)$
  $\langle \xi, \varphi \rangle = W_\varphi \sim \mathcal{N}(0, \|\varphi\|^2_{L^2})$, $\mathbb{E}[W_\varphi W_{\varphi'}] = \langle \varphi, \varphi' \rangle$

Motivations:

- Meilleure compréhension de la sous-criticalité locale
- Equation de FitzHugh–Nagumo [B, Kuehn, EJP 2016]

$$\partial_t u = \Delta u + u - u^3 + v + \xi$$
$$\partial_t v = a_1 u + a_2 v$$

EDPS de type Allen–Cahn fractionnaire

$$\boxed{\partial_t u = -(-\Delta)^{\rho/2} u + F(u) + \xi}$$

- $u = u(t,x) \in \mathbb{R}$, $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^d$, $d \geqslant 1$
- $-(-\Delta)^{\rho/2} =: \Delta^{\rho/2}$: Laplacien fractionnaire
- F polynome de degré N
- ξ bruit blanc espace-temps: $\mathbb{E}[\xi(t,x)\xi(y,s)] = \delta(x-y)\delta(t-s)$
  $\langle \xi, \varphi \rangle = W_\varphi \sim \mathcal{N}(0, \|\varphi\|^2_{L^2})$, $\mathbb{E}[W_\varphi W_{\varphi'}] = \langle \varphi, \varphi' \rangle$

Motivations:

- Meilleure compréhension de la sous-criticalité locale
- Equation de FitzHugh–Nagumo [B, Kuehn, EJP 2016]

$$\partial_t u = \Delta u + u - u^3 + v + \xi$$
$$\partial_t v = \delta \Delta v + a_1 u + a_2 v$$

EDPS de type Allen–Cahn fractionnaire

$$\partial_t u = -(-\Delta)^{\rho/2} u + F(u) + \xi$$

- $u = u(t,x) \in \mathbb{R}$, $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^d$, $d \geqslant 1$
- $-(-\Delta)^{\rho/2} =: \Delta^{\rho/2}$: Laplacien fractionnaire
- F polynome de degré N
- ξ bruit blanc espace-temps: $\mathbb{E}[\xi(t,x)\xi(y,s)] = \delta(x-y)\delta(t-s)$
  $\langle \xi, \varphi \rangle = W_\varphi \sim \mathcal{N}(0, \|\varphi\|^2_{L^2})$, $\mathbb{E}[W_\varphi W_{\varphi'}] = \langle \varphi, \varphi' \rangle$

Motivations:

- Meilleure compréhension de la sous-criticalité locale
- Equation de FitzHugh–Nagumo [B, Kuehn, EJP 2016]

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \Delta u + u - u^3 + v + \xi \\ \partial_t v &= \Delta^{\rho/2} v + a_1 u + a_2 v \end{aligned}$$

Cas $\rho = 2$, $N = 3$

Modèle Φ^4_d: $\quad \partial_t u = \Delta u - u^3 + \xi$

Cas $\rho = 2$, $N = 3$

Modèle Φ^4_d: $\quad \partial_t u = \Delta u - u^3 + \xi$

Bruit mollifié: $\xi^\varepsilon = \varrho_\varepsilon * \xi$
avec $\varrho_\varepsilon(t,x) = \frac{1}{\varepsilon^{d+2}} \varrho\left(\frac{t}{\varepsilon^2}, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ où ϱ à support compact, intégrale 1

Théorème

$d \in \{2,3\}$. $\exists$ choix de const de renormalisation $C(\varepsilon)$, $\lim_{\varepsilon\to 0} C(\varepsilon) = \infty$,

$$\partial_t u^\varepsilon = \Delta u^\varepsilon + C(\varepsilon) u^\varepsilon - (u^\varepsilon)^3 + \xi^\varepsilon$$

admet une suite u^ε de solutions locales, convergeant en proba vers une limite u lorsque $\varepsilon \to 0$.

Cas $\rho = 2$, $N = 3$

Modèle Φ^4_d: $\quad \partial_t u = \Delta u - u^3 + \xi$

Bruit mollifié: $\xi^\varepsilon = \varrho_\varepsilon * \xi$
avec $\varrho_\varepsilon(t,x) = \frac{1}{\varepsilon^{d+2}}\varrho\big(\frac{t}{\varepsilon^2}, \frac{x}{\varepsilon}\big)$ où ϱ à support compact, intégrale 1

Théorème

$d \in \{2,3\}$. $\exists$ choix de const de renormalisation $C(\varepsilon)$, $\lim_{\varepsilon\to 0} C(\varepsilon) = \infty$,

$$\partial_t u^\varepsilon = \Delta u^\varepsilon + C(\varepsilon) u^\varepsilon - (u^\varepsilon)^3 + \xi^\varepsilon$$

admet une suite u^ε de solutions locales, convergeant en proba vers une limite u lorsque $\varepsilon \to 0$.

- $d = 2$: [Da Prato & Debussche 2004] $C(\varepsilon) = C_1 \log(\varepsilon^{-1})$
- $d = 3$: [Hairer 2014, aussi Catellier & Chouk, Kupiainen]
  $C(\varepsilon) = C_1\varepsilon^{-1} + C_2 \log(\varepsilon^{-1}) + C_3$

Pourquoi faut-il renormaliser?

- $(\partial_t - \Delta)u = h \quad \Rightarrow \quad u = G * h$
- $(\partial_t - \Delta)u = F(u) + \xi \quad \Rightarrow \quad u = G * \xi + G * F(u)$

  Quel espace fonctionnel choisir?

Pourquoi faut-il renormaliser?

- $(\partial_t - \Delta)u = h \quad \Rightarrow \quad u = G * h$
- $(\partial_t - \Delta)u = F(u) + \xi \quad \Rightarrow \quad u = G * \xi + G * F(u)$

  Quel espace fonctionnel choisir?

Espaces de Hölder $\mathcal{C}^\alpha$ pour $f : I \to \mathbb{R}$, avec $I \subset \mathbb{R}$ intervalle compact:

- $0 < \alpha < 1$: $|f(x) - f(y)| \leqslant C|x-y|^\alpha \quad \forall x \neq y$
- $\alpha > 1$: $f \in \mathcal{C}^{\lfloor\alpha\rfloor}$ et $f' \in \mathcal{C}^{\alpha-1} \not\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant C|x-y|^\alpha$
- $\alpha < 0$: f distribution, $|\langle f, \eta_x^\delta\rangle| \leqslant C\delta^\alpha$ avec $\eta_x^\delta(y) = \frac{1}{\delta}\eta(\frac{x-y}{\delta})$

Pourquoi faut-il renormaliser?

- $(\partial_t - \Delta)u = h \quad \Rightarrow \quad u = G * h$
- $(\partial_t - \Delta)u = F(u) + \xi \quad \Rightarrow \quad u = G * \xi + G * F(u)$

  Quel espace fonctionnel choisir?

Espaces de Hölder $\mathcal{C}^\alpha$ pour $f : I \to \mathbb{R}$, avec $I \subset \mathbb{R}$ intervalle compact:

- $0 < \alpha < 1$: $|f(x) - f(y)| \leqslant C|x-y|^\alpha \quad \forall x \neq y$
- $\alpha > 1$: $f \in \mathcal{C}^{\lfloor \alpha \rfloor}$ et $f' \in \mathcal{C}^{\alpha-1} \not\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant C|x-y|^\alpha$
- $\alpha < 0$: f distribution, $|\langle f, \eta_x^\delta \rangle| \leqslant C\delta^\alpha$ avec $\eta_x^\delta(y) = \frac{1}{\delta}\eta(\frac{x-y}{\delta})$

Scaling parabolique $\mathcal{C}_{\mathfrak{s}}^\alpha$: $|x-y| \longrightarrow |t-s|^{1/2} + \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|$

Faits:

1. $\alpha \notin \mathbb{Z}$, $f \in \mathcal{C}_{\mathfrak{s}}^\alpha \quad \Rightarrow \quad G * f \in \mathcal{C}_{\mathfrak{s}}^{\alpha+2} \qquad$ (Schauder)
2. $\xi \in \mathcal{C}_{\mathfrak{s}}^\alpha$ p.s. $\forall \alpha < -\frac{d+2}{2}$

Pourquoi faut-il renormaliser?

- $(\partial_t - \Delta)u = h \quad \Rightarrow \quad u = G * h$
- $(\partial_t - \Delta)u = F(u) + \xi \quad \Rightarrow \quad u = G * \xi + G * F(u)$

  Quel espace fonctionnel choisir?

Espaces de Hölder $\mathcal{C}^\alpha$ pour $f : I \to \mathbb{R}$, avec $I \subset \mathbb{R}$ intervalle compact:

- $0 < \alpha < 1$: $|f(x) - f(y)| \leqslant C|x-y|^\alpha \quad \forall x \neq y$
- $\alpha > 1$: $f \in \mathcal{C}^{\lfloor \alpha \rfloor}$ et $f' \in \mathcal{C}^{\alpha-1}$ $\not\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant C|x-y|^\alpha$
- $\alpha < 0$: f distribution, $|\langle f, \eta_x^\delta \rangle| \leqslant C\delta^\alpha$ avec $\eta_x^\delta(y) = \frac{1}{\delta}\eta(\frac{x-y}{\delta})$

Scaling parabolique $\mathcal{C}_{\mathfrak{s}}^\alpha$: $|x-y| \longrightarrow |t-s|^{1/2} + \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|$

Faits:

1. $\alpha \notin \mathbb{Z}$, $f \in \mathcal{C}_{\mathfrak{s}}^\alpha \quad \Rightarrow \quad G * f \in \mathcal{C}_{\mathfrak{s}}^{\alpha+2}$ (Schauder)
2. $\xi \in \mathcal{C}_{\mathfrak{s}}^\alpha$ p.s. $\forall \alpha < -\frac{d+2}{2}$

Conséquence: $G * \xi \in \mathcal{C}_{\mathfrak{s}}^\alpha$ p.s. $\forall \alpha < \frac{2-d}{2} \leqslant 0$ pour $d \geqslant 2$

Structures de régularité

[Hairer, Inventiones Math. **198**, 269–504, 2014]:

$$\begin{tikzcd}
(u_0, Z^\varepsilon) \arrow[r, mapsto, "\mathcal{S}"] & U \arrow[d, mapsto, "\mathcal{R}"] \\
(u_0, \xi^\varepsilon) \arrow[u, mapsto, "\Psi"] \arrow[r, mapsto, "\bar{\mathcal{S}}"'] & u^\varepsilon
\end{tikzcd}$$

Structures de régularité

[Hairer, Inventiones Math. **198**, 269–504, 2014]:

$$\begin{tikzcd}
(u_0, Z^\varepsilon) \arrow[r, mapsto, "\mathcal{S}"] & U \arrow[d, mapsto, "\mathcal{R}"] \\
(u_0, \xi^\varepsilon) \arrow[u, mapsto, "\Psi"] \arrow[r, mapsto, "\bar{\mathcal{S}}"'] & u^\varepsilon
\end{tikzcd}$$

$$u = G * (\xi^\varepsilon - u^3) \quad \Rightarrow \quad U = \mathcal{I}(\Xi - U^3) + \varphi\mathbf{1} + \text{termes polynomiaux}$$

$$U_0 = 0$$

$$U_1 = \mathcal{I}(\Xi) + \varphi\mathbf{1} + \dots \qquad U_1^3 = \mathcal{I}(\Xi)^3 + 3\varphi\mathcal{I}(\Xi)^2 + 3\varphi^2\mathcal{I}(\Xi) + \varphi^3\mathbf{1} + \dots$$

Structures de régularité

[Hairer, Inventiones Math. **198**, 269–504, 2014]:

$$\begin{tikzcd}
(u_0, Z^\varepsilon) \arrow[r, mapsto, "\mathcal{S}"] & U \arrow[d, mapsto, "\mathcal{R}"] \\
(u_0, \xi^\varepsilon) \arrow[u, mapsto, "\Psi"] \arrow[r, mapsto, "\bar{\mathcal{S}}"'] & u^\varepsilon
\end{tikzcd}$$

$$u = G * (\xi^\varepsilon - u^3) \quad \Rightarrow \quad U = \mathcal{I}(\Xi - U^3) + \varphi\mathbf{1} + \text{termes polynomiaux}$$

$$U_0 = 0$$

$$U_1 = \mathcal{I}(\Xi) + \varphi\mathbf{1} + \dots \qquad U_1^3 = \mathcal{I}(\Xi)^3 + 3\varphi\mathcal{I}(\Xi)^2 + 3\varphi^2\mathcal{I}(\Xi) + \varphi^3\mathbf{1} + \dots$$

$$U_2 = \mathcal{I}(\Xi) - \mathcal{I}(\mathcal{I}(\Xi)^3) - 3\varphi\mathcal{I}(\mathcal{I}(\Xi)^2) - 3\varphi^2\mathcal{I}(\mathcal{I}(\Xi)) + \varphi\mathbf{1} + \dots$$

Structures de régularité

[Hairer, Inventiones Math. **198**, 269–504, 2014]:

$$\begin{tikzcd}
(u_0, Z^\varepsilon) \arrow[r, mapsto, "\mathcal{S}"] & U \arrow[d, mapsto, "\mathcal{R}"] \\
(u_0, \xi^\varepsilon) \arrow[u, mapsto, "\Psi"] \arrow[r, mapsto, "\bar{\mathcal{S}}"'] & u^\varepsilon
\end{tikzcd}$$

$$u = G * (\xi^\varepsilon - u^3) \quad \Rightarrow \quad U = \mathcal{I}(\Xi - U^3) + \varphi\mathbf{1} + \text{termes polynomiaux}$$

$$U_0 = 0$$

$$U_1 = \mathcal{I}(\Xi) + \varphi\mathbf{1} + \dots \qquad U_1^3 = \mathcal{I}(\Xi)^3 + 3\varphi\mathcal{I}(\Xi)^2 + 3\varphi^2\mathcal{I}(\Xi) + \varphi^3\mathbf{1} + \dots$$

$$U_2 = \mathcal{I}(\Xi) - \mathcal{I}(\mathcal{I}(\Xi)^3) - 3\varphi\mathcal{I}(\mathcal{I}(\Xi)^2) - 3\varphi^2\mathcal{I}(\mathcal{I}(\Xi)) + \varphi\mathbf{1} + \dots$$

$=:$  $-$  $- 3\varphi$  $- 3\varphi^2$  $+ \varphi\mathbf{1} + \dots$

Structures de régularité

[Hairer, Inventiones Math. **198**, 269–504, 2014]:

$$\begin{tikzcd}
(u_0, Z^\varepsilon) \arrow[r, mapsto, "\mathcal{S}"] & U \arrow[d, mapsto, "\mathcal{R}"] \\
(u_0, \xi^\varepsilon) \arrow[u, mapsto, "\Psi"] \arrow[r, mapsto, "\bar{\mathcal{S}}"'] & u^\varepsilon
\end{tikzcd}$$

$$u = G * (\xi^\varepsilon - u^3) \quad \Rightarrow \quad U = \mathcal{I}(\Xi - U^3) + \varphi\mathbf{1} + \text{termes polynomiaux}$$

$$U_0 = 0$$

$$U_1 = \mathcal{I}(\Xi) + \varphi\mathbf{1} + \dots \qquad U_1^3 = \mathcal{I}(\Xi)^3 + 3\varphi\mathcal{I}(\Xi)^2 + 3\varphi^2\mathcal{I}(\Xi) + \varphi^3\mathbf{1} + \dots$$

$$U_2 = \mathcal{I}(\Xi) - \mathcal{I}(\mathcal{I}(\Xi)^3) - 3\varphi\mathcal{I}(\mathcal{I}(\Xi)^2) - 3\varphi^2\mathcal{I}(\mathcal{I}(\Xi)) + \varphi\mathbf{1} + \dots$$

$$=: \quad - \quad - 3\varphi \quad - 3\varphi^2 \quad + \varphi\mathbf{1} + \dots$$

$1 - \frac{d}{2}$ $\quad 5 - \frac{3d}{2}$ $\quad 4 - d$ $\quad 3 - \frac{d}{2}$ $\quad 0$

Localement sous-critique: les exposants de Hölder sont bornés inf

Cas du Laplacien fractionnaire

$0 < \rho < 2$, $\Delta^{\rho/2} := -(-\Delta)^{\rho/2}$ générateur d'un processus de Lévy de noyau

$$G_\rho(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, x\cdot\xi}\, \mathrm{e}^{-t\|\xi\|^\rho}\, \mathrm{d}\xi$$

Cas du Laplacien fractionnaire

$0 < \rho < 2$, $\Delta^{\rho/2} := -(-\Delta)^{\rho/2}$ générateur d'un processus de Lévy de noyau

$$G_\rho(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, x\cdot\xi}\, \mathrm{e}^{-t\|\xi\|^\rho}\, \mathrm{d}\xi$$

Facile à vérifier:

1. $\mathfrak{s} = (\rho, 1, \dots, 1) \Rightarrow G_\rho$ régularisant d'ordre ρ:
   $f \in \mathcal{C}^\alpha_{\mathfrak{s}}$, $\alpha + \rho \notin \mathbb{Z} \Rightarrow G_\rho * f \in \mathcal{C}^{\alpha+\rho}_{\mathfrak{s}}$

Cas du Laplacien fractionnaire

$0 < \rho < 2$, $\Delta^{\rho/2} := -(-\Delta)^{\rho/2}$ générateur d'un processus de Lévy de noyau

$$G_\rho(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, x\cdot\xi}\, \mathrm{e}^{-t\|\xi\|^\rho}\, \mathrm{d}\xi$$

Facile à vérifier:

1. $\mathfrak{s} = (\rho, 1, \dots, 1) \Rightarrow G_\rho$ régularisant d'ordre ρ:
   $f \in \mathcal{C}^\alpha_{\mathfrak{s}}$, $\alpha + \rho \notin \mathbb{Z} \Rightarrow G_\rho * f \in \mathcal{C}^{\alpha+\rho}_{\mathfrak{s}}$
2. $\xi \in \mathcal{C}^\alpha_{\mathfrak{s}}$ p.s. $\forall \alpha < -\frac{\rho+d}{2}$

Cas du Laplacien fractionnaire

$0 < \rho < 2$, $\Delta^{\rho/2} := -(-\Delta)^{\rho/2}$ générateur d'un processus de Lévy de noyau

$$G_\rho(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, x\cdot\xi}\, \mathrm{e}^{-t\|\xi\|^\rho}\, \mathrm{d}\xi$$

Facile à vérifier:

1. $\mathfrak{s} = (\rho, 1, \dots, 1) \Rightarrow G_\rho$ régularisant d'ordre ρ:
   $f \in \mathcal{C}^\alpha_{\mathfrak{s}}$, $\alpha + \rho \notin \mathbb{Z} \Rightarrow G_\rho * f \in \mathcal{C}^{\alpha+\rho}_{\mathfrak{s}}$
2. $\xi \in \mathcal{C}^\alpha_{\mathfrak{s}}$ p.s. $\forall \alpha < -\frac{\rho+d}{2}$
3. $\partial_t u = \Delta^{\rho/2} u + \underbrace{F(u)}_{\text{degré } N} + \xi$ loc. sous-critique $\Leftrightarrow \rho > \rho_{\mathrm{c}} = d\frac{N-1}{N+1}$

Cas du Laplacien fractionnaire

$0 < \rho < 2$, $\Delta^{\rho/2} := -(-\Delta)^{\rho/2}$ générateur d'un processus de Lévy de noyau

$$G_\rho(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, x\cdot\xi}\, \mathrm{e}^{-t\|\xi\|^\rho}\, \mathrm{d}\xi$$

Facile à vérifier:

1. $\mathfrak{s} = (\rho, 1, \dots, 1) \Rightarrow G_\rho$ régularisant d'ordre ρ:
   $f \in \mathcal{C}_{\mathfrak{s}}^\alpha$, $\alpha + \rho \notin \mathbb{Z} \Rightarrow G_\rho * f \in \mathcal{C}_{\mathfrak{s}}^{\alpha+\rho}$
2. $\xi \in \mathcal{C}_{\mathfrak{s}}^\alpha$ p.s. $\forall \alpha < -\frac{\rho+d}{2}$
3. $\partial_t u = \Delta^{\rho/2} u + \underbrace{F(u)}_{\text{degré } N} + \xi$ loc. sous-critique $\Leftrightarrow \rho > \rho_{\mathrm{c}} = d\frac{N-1}{N+1}$

Idée: Equ de point fixe $U = \mathcal{I}(\Xi + F(U)) + \varphi\mathbf{1} + \dots$
$|\Xi|_{\mathfrak{s}} = -\frac{\rho+d}{2} - \kappa =: \alpha_0$
$|\mathcal{I}(\Xi)^N|_{\mathfrak{s}} = N(\alpha_0 + \rho) = \frac{N}{2}(\rho - d) - N\kappa$
$|\mathcal{I}(\Xi)^N|_{\mathfrak{s}} > |\Xi|_{\mathfrak{s}} \Leftrightarrow \rho > \rho_{\mathrm{c}}$
puis récurrence sur l'application du point fixe

Espace modèle

$U = \mathcal{I}(\Xi + F(U)) + \varphi\mathbf{1} + \dots$

- $\mathcal{U}_F$: symboles représentant la solution U
- $\mathcal{F}_F \supset \mathcal{U}_F$: symboles représentant l'équation (i.e. $\Xi + F(U)$)

Espace modèle

$U = \mathcal{I}(\Xi + F(U)) + \varphi\mathbf{1} + \dots$

- $\mathcal{U}_F$: symboles représentant la solution U
- $\mathcal{F}_F \supset \mathcal{U}_F$: symboles représentant l'équation (i.e. $\Xi + F(U)$)

donnés par la récurrence $\mathcal{W}_0 = \mathcal{U}_0 = \emptyset$ et

$$\mathcal{W}_m = \mathcal{W}_{m-1} \cup \mathcal{U}_{m-1} \cup \cdots \cup \mathcal{U}_{m-1}^N \cup \{\Xi\}$$
$$\mathcal{U}_m = \mathcal{I}(\mathcal{W}_m) \cup \{X^k\}$$

avec $AB := \{\tau\tau' \colon \tau \in A, \tau' \in B\}$

Alors $\mathcal{U}_F = \bigcup_{m\geqslant 0} \mathcal{U}_m, \quad \mathcal{F}_F = \bigcup_{m\geqslant 0} (\mathcal{W}_m \cup \mathcal{U}_m)$

Espace modèle

$U = \mathcal{I}(\Xi + F(U)) + \varphi\mathbf{1} + \dots$

- $\mathcal{U}_F$: symboles représentant la solution U
- $\mathcal{F}_F \supset \mathcal{U}_F$: symboles représentant l'équation (i.e. $\Xi + F(U)$)

donnés par la récurrence $\mathcal{W}_0 = \mathcal{U}_0 = \emptyset$ et

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_m &= \mathcal{W}_{m-1} \cup \mathcal{U}_{m-1} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{m-1}^N \cup \{\Xi\} \\ \mathcal{U}_m &= \mathcal{I}(\mathcal{W}_m) \cup \{X^k\} \end{aligned}$$

avec $AB := \{\tau\tau' \colon \tau \in A, \tau' \in B\}$

Alors $\mathcal{U}_F = \bigcup_{m\geqslant 0} \mathcal{U}_m, \quad \mathcal{F}_F = \bigcup_{m\geqslant 0} (\mathcal{W}_m \cup \mathcal{U}_m)$

Questions: Soit $\mathcal{A}_F = \{|\tau|_{\mathfrak{s}} \colon \tau \in \mathcal{F}_F\}$

1. Estimer $h_F = \#(\mathcal{A}_F \cup \mathbb{R}_-)$ (nombre d'exposants de Hölder négatifs)
2. Estimer $c_F = \#\{\tau \in \mathcal{F}_F \colon |\tau|_{\mathfrak{s}} < 0\}$ (nombre de symboles singuliers)

Nombre d'exposants de Hölder négatifs

$h_F = \#(\mathcal{A}_F \cup \mathbb{R}_-)$

Théorème 1

$$\frac{\rho + d}{N+1}\frac{1}{\rho - \rho_c} \leqslant h_F \leqslant 1 + \frac{(\rho + d)dN}{N+1}\frac{1}{\rho - \rho_c}$$

Nombre d'exposants de Hölder négatifs

$h_F = \#(\mathcal{A}_F \cup \mathbb{R}_-)$

Théorème 1

$$\frac{\rho + d}{N+1}\frac{1}{\rho - \rho_c} \leqslant h_F \leqslant 1 + \frac{(\rho + d)dN}{N+1}\frac{1}{\rho - \rho_c}$$

Preuve:

$|\tau|_{\mathfrak{s}} = -\frac{\rho+d}{2}p(\tau) + q(\tau)\rho + |k|_{\mathfrak{s}}(\tau) - \mathcal{O}(\kappa)$

$p = \#\Xi$, $q = \#\mathcal{I}$, $0 \leqslant |k|_{\mathfrak{s}} =$ exp. polynomial

- $D_0(\mathcal{U}) = \{(p(\tau), q(\tau)) \colon \tau \in \mathcal{U}\} \subset \mathbb{N}^2$
- $D_0(\mathcal{U}^n) =$ env. convexe de $nD_0(\mathcal{U})$

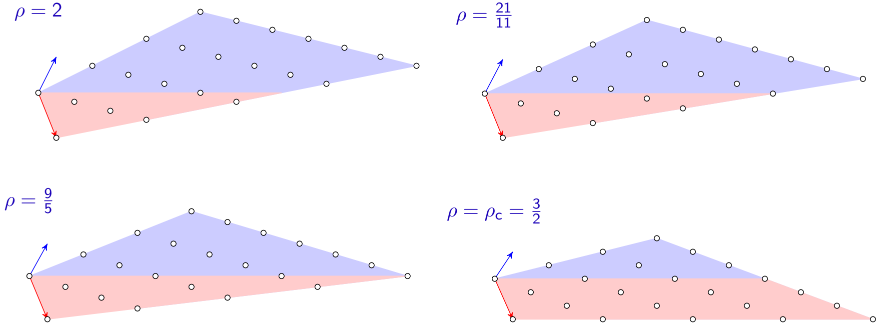
Nombre d'exposants de Hölder négatifs

$h_F = \#(\mathcal{A}_F \cup \mathbb{R}_-)$

Théorème 1

$$\frac{\rho + d}{N+1}\frac{1}{\rho - \rho_c} \leqslant h_F \leqslant 1 + \frac{(\rho+d)dN}{N+1}\frac{1}{\rho - \rho_c}$$

$D_0(\mathcal{W}_3)$ pour $N = d = 3$



Nombre d'exposants de Hölder négatifs

$h_F = \#(\mathcal{A}_F \cup \mathbb{R}_-)$

Théorème 1

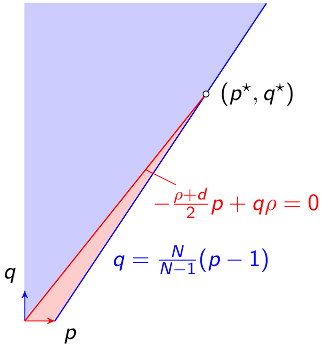
$$\frac{\rho+d}{N+1}\frac{1}{\rho-\rho_c} \leqslant h_F \leqslant 1 + \frac{(\rho+d)dN}{N+1}\frac{1}{\rho-\rho_c}$$

Preuve:

$|\tau|_{\mathfrak{s}} = -\frac{\rho+d}{2}p(\tau) + q(\tau)\rho + |k|_{\mathfrak{s}}(\tau) - \mathcal{O}(\kappa)$

$p = \#\Xi$, $q = \#\mathcal{I}$, $0 \leqslant |k|_{\mathfrak{s}} =$ exp. polynomial

- $D_0(\mathcal{U}) = \{(p(\tau), q(\tau))\colon \tau \in \mathcal{U}\} \subset \mathbb{N}^2$
- $D_0(\mathcal{U}^n) =$ env. convexe de $nD_0(\mathcal{U})$
- $\lim_{m\to\infty} D_0(\mathcal{U}_m) =$ cône tronqué
- $|\tau|_{\mathfrak{s}} < 0 \Rightarrow p = 1 + \left\lfloor \frac{N-1}{N}q \right\rfloor$ et $\tau \in$ triangle
- $h_F =$ nombre de points dans le triangle
- $q^\star = \frac{(\rho+d)N}{(N+1)(\rho-\rho_c)} + \mathcal{O}(\kappa)$



Nombre de symboles

$c_F = \#\{\tau \in \mathcal{F}_F \colon |\tau|_{\mathfrak{s}} < 0\}$

Théorème 2

$$C_N^-(\rho - \rho_{\mathrm{c}})^{3/2}\,\mathrm{e}^{\beta_N d/(\rho-\rho_{\mathrm{c}})} \leqslant c_F \leqslant C_N^+(\rho - \rho_{\mathrm{c}})^{3/2}\,\mathrm{e}^{\beta_N d/(\rho-\rho_{\mathrm{c}})}$$

Nombre de symboles

$c_F = \#\{\tau \in \mathcal{F}_F \colon |\tau|_{\mathfrak{s}} < 0\}$

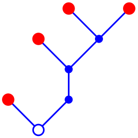
Théorème 2

$$C_N^-(\rho - \rho_c)^{3/2}\,\mathrm{e}^{\beta_N d/(\rho-\rho_c)} \leqslant c_F \leqslant C_N^+(\rho - \rho_c)^{3/2}\,\mathrm{e}^{\beta_N d/(\rho-\rho_c)}$$

Cas $N = 2$: $\tau \to$ arbre de degré $\leqslant 3$, p feuilles, q arêtes

$d_i :=$ # sommets de degré i

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 + d_3 &= q + 1 \\ d_1 + 2d_2 + 3d_3 &= 2q \\ d_1 &= p + 1_{\{\deg \emptyset = 1\}} \end{aligned}$$



Nombre de symboles

$c_F = \#\{\tau \in \mathcal{F}_F : |\tau|_{\mathfrak{s}} < 0\}$

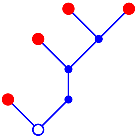
Théorème 2

$$C_N^-(\rho - \rho_c)^{3/2}\, e^{\beta_N d/(\rho-\rho_c)} \leqslant c_F \leqslant C_N^+(\rho - \rho_c)^{3/2}\, e^{\beta_N d/(\rho-\rho_c)}$$

Cas $N = 2$: $\tau \to$ arbre de degré $\leqslant 3$, p feuilles, q arêtes

$d_i :=$ # sommets de degré i

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 + d_3 &= q + 1 \\ d_1 + 2d_2 + 3d_3 &= 2q \\ d_1 &= p + 1_{\{\deg \emptyset = 1\}} \end{aligned}$$



- $q = 2n \Rightarrow$ arbre binaire à $q+1$ sommets
- $q = 2n+1 \Rightarrow$ arbre binaire à $q+2$ sommets moins une arête

Nombre de symboles

$c_F = \#\{\tau \in \mathcal{F}_F : |\tau|_{\mathfrak{s}} < 0\}$

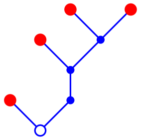
Théorème 2

$$C_N^-(\rho-\rho_c)^{3/2}\,\mathrm{e}^{\beta_N d/(\rho-\rho_c)} \leqslant c_F \leqslant C_N^+(\rho-\rho_c)^{3/2}\,\mathrm{e}^{\beta_N d/(\rho-\rho_c)}$$

Cas $N=2$: $\tau \to$ arbre de degré $\leqslant 3$, p feuilles, q arêtes

$d_i :=$ # sommets de degré i

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 + d_3 &= q+1 \\ d_1 + 2d_2 + 3d_3 &= 2q \\ d_1 &= p + 1_{\{\deg \emptyset = 1\}} \end{aligned}$$



- $q = 2n \Rightarrow$ arbre binaire à $q+1$ sommets
- $q = 2n+1 \Rightarrow$ arbre binaire à $q+2$ sommets moins une arête

⚠ On doit compter les arbres à homéomorphisme près

Nombres de Wedderburn–Etherington $W_n \simeq c\dfrac{(1/0.4072\ldots)^n}{n^{3/2}}$ [Otter 1948]

Propriétés statistiques

$\Omega = \{\tau \in \mathcal{F}_F : |\tau|_{\mathfrak{s}} < 0\}$, $\mathbb{P}$ probabilité uniforme

Propriétés de variables aléatoires $X : \Omega \to \mathbb{R}$ lorsque $\rho \searrow \rho_c$?

Propriétés statistiques

$\Omega = \{\tau \in \mathcal{F}_F : |\tau|_{\mathfrak{s}} < 0\}$, $\mathbb{P}$ probabilité uniforme

Propriétés de variables aléatoires $X : \Omega \to \mathbb{R}$ lorsque $\rho \searrow \rho_c$?

Cas $X = Q = \#\mathcal{I}$:

- $\mathbb{P}\{Q \notin N\mathbb{N}\} \leqslant e^{-\gamma/(\rho-\rho_c)}$
- $\mathbb{E}[Q/q^\star] = 1 + \mathcal{O}(\rho - \rho_c)$ et $\mathrm{Var}[Q/q^\star] = \mathcal{O}((\rho-\rho_c)^2)$
- $-\lim_{\rho\searrow\rho_c} (\rho - \rho_c) \log \mathbb{P}\{Q/q^\star \leqslant x\} = \beta_N d(1-x) \qquad \forall x \in [0,1]$

Propriétés statistiques

$\Omega = \{\tau \in \mathcal{F}_F : |\tau|_{\mathfrak{s}} < 0\}$, $\mathbb{P}$ probabilité uniforme

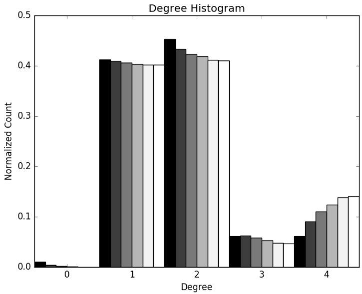
Propriétés de variables aléatoires $X : \Omega \to \mathbb{R}$ lorsque $\rho \searrow \rho_c$?

Cas $X = Q = \#\mathcal{I}$:

- $\mathbb{P}\{Q \notin N\mathbb{N}\} \leqslant e^{-\gamma/(\rho-\rho_c)}$
- $\mathbb{E}[Q/q^\star] = 1 + \mathcal{O}(\rho - \rho_c)$ et $\mathrm{Var}[Q/q^\star] = \mathcal{O}((\rho - \rho_c)^2)$
- $-\lim_{\rho \searrow \rho_c} (\rho - \rho_c) \log \mathbb{P}\{Q/q^\star \leqslant x\} = \beta_N d(1-x) \qquad \forall x \in [0,1]$

Autres variables aléatoires intéressantes:

- Nombre P de Ξ: fonction de Q
- Exposant de Hölder: concentré en 0^-
- Distribution de degrés: proche de $\left(\frac{N-1}{N}, 0, \dots, 0, \frac{1}{N}\right)$
- Hauteur et diamètre [Broutin & Flajolet]: d'ordre $1/\sqrt{\rho - \rho_c}$



$N = d = 3$, $\rho \in \{1.8, 1.75, 1.7, 1.76, 1.6, 1.59\}$

Renormalisation

$$\partial_t u^\varepsilon = \Delta^{\rho/2} u^\varepsilon + C(\varepsilon) u^\varepsilon - (u^\varepsilon)^3 + \xi^\varepsilon$$

Renormalisation

$$\partial_t u^\varepsilon = \Delta^{\rho/2} u^\varepsilon + C(\varepsilon) u^\varepsilon - (u^\varepsilon)^3 + \xi^\varepsilon$$

Théorie BPHZ [Bruned, Hairer & Zambotti 2016, Chandra & Hairer 2016]:
On s'attend à

$$C(\varepsilon) \simeq \sum_{\tau \in \mathcal{F}_F :\, |\tau|_\mathfrak{s} < 0} \varepsilon^{|\tau|_\mathfrak{s}} \qquad (\varepsilon^{0-} = \log(\varepsilon^{-1}))$$

Renormalisation

$$\partial_t u^\varepsilon = \Delta^{\rho/2} u^\varepsilon + C(\varepsilon) u^\varepsilon - (u^\varepsilon)^3 + \xi^\varepsilon$$

Théorie BPHZ [Bruned, Hairer & Zambotti 2016, Chandra & Hairer 2016]:
On s'attend à

$$C(\varepsilon) \simeq \sum_{\tau \in \mathcal{F}_F :\, |\tau|_{\mathfrak{s}} < 0} \varepsilon^{|\tau|_{\mathfrak{s}}} \qquad (\varepsilon^{0-} = \log(\varepsilon^{-1}))$$

$$= c_F \mathbb{E}[\varepsilon^{|\tau|_{\mathfrak{s}}}]$$

Renormalisation

$$\partial_t u^\varepsilon = \Delta^{\rho/2} u^\varepsilon + C(\varepsilon) u^\varepsilon - (u^\varepsilon)^3 + \xi^\varepsilon$$

Théorie BPHZ [Bruned, Hairer & Zambotti 2016, Chandra & Hairer 2016]:
On s'attend à

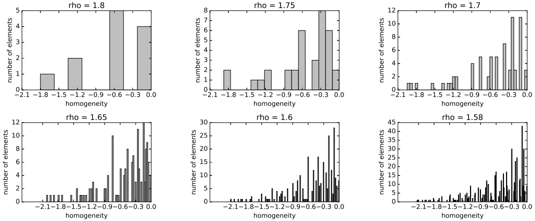
$$C(\varepsilon) \simeq \sum_{\tau \in \mathcal{F}_F :\, |\tau|_{\mathfrak{s}} < 0} \varepsilon^{|\tau|_{\mathfrak{s}}} \qquad (\varepsilon^{0-} = \log(\varepsilon^{-1}))$$

$$= c_F \mathbb{E}[\varepsilon^{|\tau|_{\mathfrak{s}}}]$$

$$\mathbb{P}\{|\tau|_{\mathfrak{s}} = -h\} \sim \mathrm{e}^{-\gamma_N h/(\rho - \rho_c)}$$

$$\gamma_N = \frac{N+1}{N} \beta_N$$

$$-\frac{\rho+d}{2} < -h < 0$$



Renormalisation

$$\partial_t u^\varepsilon = \Delta^{\rho/2} u^\varepsilon + C(\varepsilon) u^\varepsilon - (u^\varepsilon)^3 + \xi^\varepsilon$$

Théorie BPHZ [Bruned, Hairer & Zambotti 2016, Chandra & Hairer 2016]:
On s'attend à

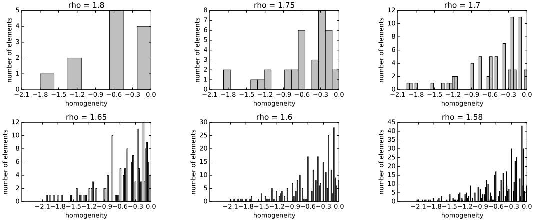
$$C(\varepsilon) \simeq \sum_{\tau \in \mathcal{F}_F \colon |\tau|_{\mathfrak{s}} < 0} \varepsilon^{|\tau|_{\mathfrak{s}}} \qquad (\varepsilon^{0-} = \log(\varepsilon^{-1}))$$

$$= c_F \mathbb{E}[\varepsilon^{|\tau|_{\mathfrak{s}}}]$$

$$\mathbb{P}\{|\tau|_{\mathfrak{s}} = -h\} \sim \mathrm{e}^{-\gamma_N h/(\rho - \rho_c)}$$

$$\gamma_N = \frac{N+1}{N} \beta_N$$

$$-\frac{\rho+d}{2} < -h < 0$$



$$\Rightarrow C(\varepsilon) \sim \begin{cases} c_F \log(\varepsilon^{-1}) & \text{si } \varepsilon > \mathrm{e}^{-\gamma_N/(\rho-\rho_c)} \\ c_F \left(\dfrac{\varepsilon}{\mathrm{e}^{-\gamma_N/(\rho-\rho_c)}} \right)^{-(d-\rho)} & \text{si } \varepsilon < \mathrm{e}^{-\gamma_N/(\rho-\rho_c)} \end{cases}$$

Références

- M. Hairer, *A theory of regularity structures*, Inv. Math. **198**, 269–504 (2014)
- M. Hairer, *Introduction to Regularity Structures*, lecture notes (2013)
- A. Chandra, H. Weber, *Stochastic PDEs, regularity structures, and interacting particle systems*, Annales Mathématiques de la Faculté des Sciences de Toulouse (in press), arXiv/1508.03616

- N. B., C. Kuehn, *Regularity structures and renormalisation of FitzHugh–Nagumo SPDEs in three space dimensions*, Elec J Prob 21 (18):1-48 (2016)
- N. B., C. Kuehn, *Model spaces of regularity structures in space-fractional SPDEs*, J Statist Phys (online first), arXiv/1701.03066

- Y. Bruned, M. Hairer, L. Zambotti, *Algebraic renormalisation of regularity structures*, arXiv/1610.08468
- A. Chandra, M. Hairer, *An analytic BPHZ theorem for regularity structures*, arXiv/1612.08138
- M. Hairer, *An analyst's take on the BPHZ theorem*, arXiv/1704.08634

Publicité

Au CIRM, Marseille, Luminy: