

Asymptotiques spectrales précises pour des diffusions métastables non réversibles

Dorian Le Peutrec

(D'après des travaux avec Laurent Michel et Jean-François Bony)

Première rencontre ANR PERISTOCH

Paris, les 23-24 Mai 2022

- 1 Introduction - Dynamiques elliptiques réversibles
 - Dynamique sur-amortie de Langevin réversible
 - Générateur de l'évolution
 - Régime basse température et métastabilité
- 2 Dynamiques elliptiques non réversibles "associées"
 - Dynamique sur-amortie de Langevin non réversible
 - Résultats dans le cas non réversible
 - Dynamique de Langevin non elliptique

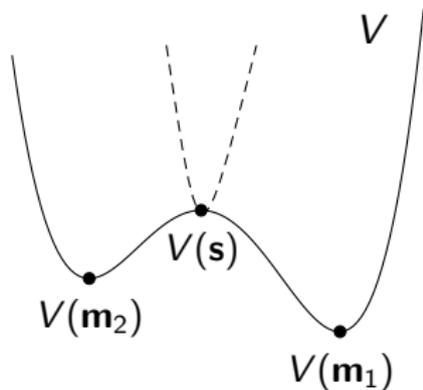
- 1 Introduction - Dynamiques elliptiques réversibles
 - Dynamique sur-amortie de Langevin réversible
 - Générateur de l'évolution
 - Régime basse température et métastabilité
- 2 Dynamiques elliptiques non réversibles "associées"
 - Dynamique sur-amortie de Langevin non réversible
 - Résultats dans le cas non réversible
 - Dynamique de Langevin non elliptique

- 1 Introduction - Dynamiques elliptiques réversibles
 - Dynamique sur-amortie de Langevin réversible
 - Générateur de l'évolution
 - Régime basse température et métastabilité
- 2 Dynamiques elliptiques non réversibles "associées"
 - Dynamique sur-amortie de Langevin non réversible
 - Résultats dans le cas non réversible
 - Dynamique de Langevin non elliptique

- Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ la solution dans \mathbb{R}^d de l'EDO de type "gradient" :

$$dX_t = -\nabla V(X_t) dt$$

où $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ régulière de type "double-puits" :



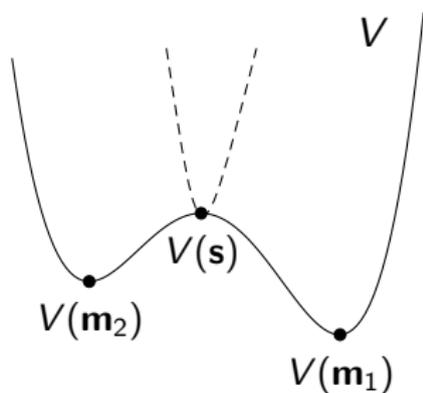
Hypo. sur V :

- $(\nabla V)^{-1}(0) = \{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{s}\}$
- $\text{Hess } V(\mathbf{m}_i) > 0, i = 1, 2$
- \mathbf{s} point selle non dégénéré
- $V(x) = |x|^2$ pour x grand

- Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ la solution dans \mathbb{R}^d de l'EDO de type "gradient" :

$$dX_t = -\nabla V(X_t) dt$$

où $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ régulière de type "double-puits" :



Hypo. sur V :

- $(\nabla V)^{-1}(0) = \{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{s}\}$
- $\text{Hess } V(\mathbf{m}_i) > 0, i = 1, 2$
- \mathbf{s} point selle non dégénéré
- $V(x) = |x|^2$ pour x grand

Comportement lorsque $t \rightarrow +\infty$:

- Toute trajectoire converge vers l'un des trois équilibres $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$ ou \mathbf{s}
- Seuls les équilibres \mathbf{m}_1 et \mathbf{m}_2 sont stables
- Les C.I. telles que $X_t \rightarrow \mathbf{s}$ décrivent une hypersurface (passant par \mathbf{s})

- Dynamique de Langevin associée : EDO stochastique

$$dX_t = -\nabla V(X_t) dt + \sqrt{2h} dB_t$$

où :

- $(B_t)_{t \geq 0}$ = mouvement brownien d -dimensionnel standard
- $h = \kappa_B T > 0$, T = température, κ_B = constante de Boltzmann

↔ Modèle prototypique utilisé en physique statistique pour simuler l'évolution d'un système moléculaire à température h fixée

- Dynamique de Langevin associée : EDO stochastique

$$dX_t = -\nabla V(X_t) dt + \sqrt{2h} dB_t$$

où :

- $(B_t)_{t \geq 0}$ = mouvement brownien d -dimensionnel standard
- $h = \kappa_B T > 0$, T = température, κ_B = constante de Boltzmann

↔ Modèle prototypique utilisé en physique statistique pour simuler l'évolution d'un système moléculaire à température h fixée

- Mesure de "Gibbs" invariante :

$$w(dx) = Z_h^{-1} e^{-\frac{V}{h}} dx, \quad Z_h = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{V}{h}} dx < +\infty$$

- Dynamique de Langevin associée : EDO stochastique

$$dX_t = -\nabla V(X_t) dt + \sqrt{2h} dB_t$$

où :

- $(B_t)_{t \geq 0}$ = mouvement brownien d -dimensionnel standard
- $h = \kappa_B T > 0$, T = température, κ_B = constante de Boltzmann

↔ Modèle prototypique utilisé en physique statistique pour simuler l'évolution d'un système moléculaire à température h fixée

- Mesure de "Gibbs" invariante :

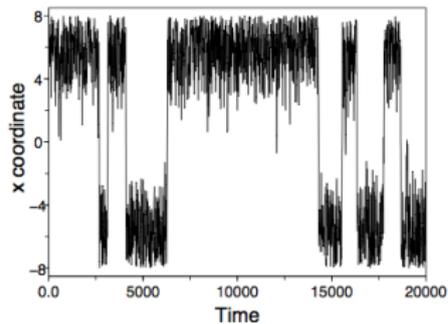
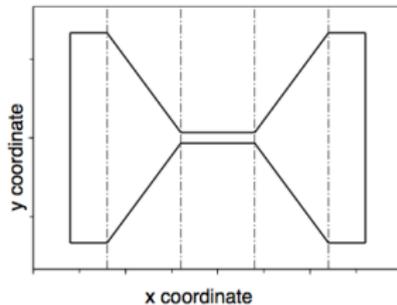
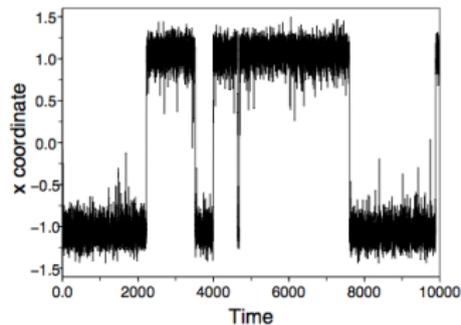
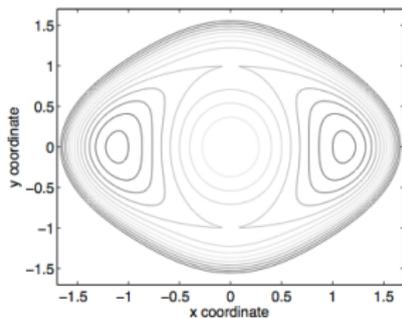
$$w(dx) = Z_h^{-1} e^{-\frac{V}{h}} dx, \quad Z_h = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{V}{h}} dx < +\infty$$

- **Évolution** lorsque $0 < h \ll 1$: le processus X se retrouve "piégé", longtemps, près d'un minimum local de V (par le flot de $-\nabla V$) puis "saute", rapidement, près de l'autre minimum (par diffusion brownienne)

↔ Les minima \mathbf{m}_1 et \mathbf{m}_2 sont dits métastables

↔ Difficile de simuler efficacement $(X_t)_{t \geq 0}$ en temps long en intégrant l'EDS

Illustration de la métastabilité



- 1 Introduction - Dynamiques elliptiques réversibles
 - Dynamique sur-amortie de Langevin réversible
 - Générateur de l'évolution
 - Régime basse température et métastabilité
- 2 Dynamiques elliptiques non réversibles "associées"
 - Dynamique sur-amortie de Langevin non réversible
 - Résultats dans le cas non réversible
 - Dynamique de Langevin non elliptique

- Pour $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ raisonnable,

$$x \in \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{E}[f(X_t) | X_0 = x] = (e^{-tL_{V,h}}f)(x)$$

résout l'équation "de la chaleur"

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + (L_{V,h}u)(t, x) = 0 & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ u(0, x) = f(x) & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

où $L_{V,h}$ est le **générateur** infinitésimal de la dynamique :

$$L_{V,h} = -h\Delta + \nabla V \cdot \nabla = -h e^{\frac{V}{h}} \operatorname{div} (e^{-\frac{V}{h}} \nabla \cdot)$$

- Pour $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ raisonnable,

$$x \in \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{E}[f(X_t) | X_0 = x] = (e^{-tL_{V,h}}f)(x)$$

résout l'équation "de la chaleur"

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + (L_{V,h}u)(t, x) = 0 & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ u(0, x) = f(x) & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

où $L_{V,h}$ est le **générateur** infinitésimal de la dynamique :

$$L_{V,h} = -h\Delta + \nabla V \cdot \nabla = -h e^{\frac{V}{h}} \operatorname{div} (e^{-\frac{V}{h}} \nabla \cdot)$$

- **Propriétés du générateur $L_{V,h}$**

- Invariance de $w(dx) : L_{V,h}^\dagger(e^{-\frac{V}{h}}) = -h \operatorname{div} (e^{-\frac{V}{h}} \nabla e^{\frac{V}{h}} \cdot) (e^{-\frac{V}{h}}) = 0$
- Pour tout $f, g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, dans le Hilbert $L_w^2 := L^2(w(dx))$

$$\langle L_{V,h}f, g \rangle_w = \int_{\mathbb{R}^d} (L_{V,h}f)g w(x)dx = h \langle \nabla f, \nabla g \rangle_w = \langle f, L_{V,h}g \rangle_w$$

$\Leftrightarrow L_{V,h}$ symétrique et positif (prendre $g = f$!) dans L_w^2

\Leftrightarrow Processus réversible

• Décomposition spectrale :

- D'après le comportement de V à l'infini, $L_{V,h}$ "diagonalisable" dans une base hilbertienne $(e_{n,h})_{n \in \mathbb{N}}$ de L^2_w , de valeurs propres réelles :

$$0 \leq \lambda_{0,h} \leq \lambda_{1,h} \leq \cdots \leq \lambda_{n,h} \leq \cdots \quad \text{et} \quad \lambda_{n,h} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{-tL_{V,h}} e_{n,h} = e^{-t\lambda_{n,h}} e_{n,h}$

• Décomposition spectrale :

- D'après le comportement de V à l'infini, $L_{V,h}$ "diagonalisable" dans une base hilbertienne $(e_{n,h})_{n \in \mathbb{N}}$ de L^2_w , de valeurs propres réelles :

$$0 \leq \lambda_{0,h} \leq \lambda_{1,h} \leq \dots \leq \lambda_{n,h} \leq \dots \quad \text{et} \quad \lambda_{n,h} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{-tL_{V,h}} e_{n,h} = e^{-t\lambda_{n,h}} e_{n,h}$

• Convergence vers l'équilibre :

- La relation $\langle L_{V,h} f, f \rangle_w = h \|\nabla f\|_w^2$ implique :

$$\text{Ker } L_{V,h} = \text{Span}\{\mathbf{1} = e_{0,h}\} \implies \lambda_{0,h} = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_{1,h} > 0$$

• Décomposition spectrale :

- D'après le comportement de V à l'infini, $L_{V,h}$ "diagonalisable" dans une base hilbertienne $(e_{n,h})_{n \in \mathbb{N}}$ de L_w^2 , de valeurs propres réelles :

$$0 \leq \lambda_{0,h} \leq \lambda_{1,h} \leq \dots \leq \lambda_{n,h} \leq \dots \quad \text{et} \quad \lambda_{n,h} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{-tL_{V,h}} e_{n,h} = e^{-t\lambda_{n,h}} e_{n,h}$

• Convergence vers l'équilibre :

- La relation $\langle L_{V,h} f, f \rangle_w = h \|\nabla f\|_w^2$ implique :

$$\text{Ker } L_{V,h} = \text{Span}\{\mathbf{1} = e_{0,h}\} \implies \lambda_{0,h} = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_{1,h} > 0$$

- Le "trou spectral" $\lambda_{1,h} - \lambda_{0,h} = \lambda_{1,h}$ donne le **taux expo. optimal** de convergence vers l'équilibre dans L_w^2 :

$$\forall f \in L_w^2, \forall t \geq 0, \quad e^{-tL_{V,h}} f = \underbrace{\Pi_{0,h} f}_{= \int f w(dx)} + \sum_{n \geq 1} e^{-t\lambda_{n,h}} \Pi_{n,h} f$$

$$\implies \|e^{-tL_{V,h}} f - \int f w(dx)\|_w \leq e^{-\lambda_{1,h} t} \|f - \int f w(dx)\|_w$$

- 1 Introduction - Dynamiques elliptiques réversibles
 - Dynamique sur-amortie de Langevin réversible
 - Générateur de l'évolution
 - Régime basse température et métastabilité
- 2 Dynamiques elliptiques non réversibles "associées"
 - Dynamique sur-amortie de Langevin non réversible
 - Résultats dans le cas non réversible
 - Dynamique de Langevin non elliptique

Théorème 1 (Witten 82, Helffer-Sjöstrand 85)

Il existe $C, D > 0$ et $h_0 > 0$ tels que, pour tout $h \in (0, h_0]$,

$$\lambda_{0,h} = 0 < \lambda_{1,h} \leq e^{-\frac{D}{h}} \leq C \leq \lambda_{2,h}$$

Théorème 1 (Witten 82, Helffer-Sjöstrand 85)

Il existe $C, D > 0$ et $h_0 > 0$ tels que, pour tout $h \in (0, h_0]$,

$$\lambda_{0,h} = 0 < \lambda_{1,h} \leq e^{-\frac{D}{h}} \leq C \leq \lambda_{2,h}$$

Conséquence : L'évolution dans L_w^2 s'écrit, pour tous $f \in L_w^2$ et $t \geq 0$,

$$e^{-tL_{V,h}} f = \int f w(dx) + \underbrace{e^{-t\lambda_{1,h}} \Pi_{1,h} f}_{\text{Comportement métastable}} + \underbrace{\mathcal{O}(e^{-tC}) \|f\|_w}_{\text{Converge vite vers 0}}$$

Théorème 1 (Witten 82, Helffer-Sjöstrand 85)

Il existe $C, D > 0$ et $h_0 > 0$ tels que, pour tout $h \in (0, h_0]$,

$$\lambda_{0,h} = 0 < \lambda_{1,h} \leq e^{-\frac{D}{h}} \leq C \leq \lambda_{2,h}$$

Conséquence : L'évolution dans L_w^2 s'écrit, pour tous $f \in L_w^2$ et $t \geq 0$,

$$e^{-tL_{V,h}} f = \int f w(dx) + \underbrace{e^{-t\lambda_{1,h}} \Pi_{1,h} f}_{\text{Comportement métastable}} + \underbrace{\mathcal{O}(e^{-tC})}_{\text{Converge vite vers 0}} \|f\|_w$$

Théorème 2 (Bovier-Gayard-Klein 2005, Helffer-Klein-Nier 2004)

On a la *formule d'Eyring-Kramers* suivante dans la limite $h \rightarrow 0^+$:

$$\left(\frac{1}{\mathbb{E}[\tau_{\mathbf{m}_2 \rightarrow \mathbf{m}_1}]} \sim \right) \lambda_{1,h} \sim \frac{|\lambda_1| \det \text{Hess } V(\mathbf{m}_2)^{\frac{1}{2}}}{2\pi |\det \text{Hess } V(\mathbf{s})|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{V(\mathbf{s}) - V(\mathbf{m}_2)}{h}},$$

où λ_1 est l'unique valeur propre négative de $\text{Hess } V(\mathbf{s})$.

Travaux connexes : Holley-Kusuoka-Stroock, Day, Miclo, Mathieu, Helffer-Nier, L.P., Berglund-Gentz, Cérou-Guyader-Lelièvre-Malrieu, Berglund-Dutercq, Michel...

- 1 Introduction - Dynamiques elliptiques réversibles
 - Dynamique sur-amortie de Langevin réversible
 - Générateur de l'évolution
 - Régime basse température et métastabilité
- 2 Dynamiques elliptiques non réversibles "associées"
 - Dynamique sur-amortie de Langevin non réversible
 - Résultats dans le cas non réversible
 - Dynamique de Langevin non elliptique

- 1 Introduction - Dynamiques elliptiques réversibles
 - Dynamique sur-amortie de Langevin réversible
 - Générateur de l'évolution
 - Régime basse température et métastabilité
- 2 Dynamiques elliptiques non réversibles "associées"
 - Dynamique sur-amortie de Langevin non réversible
 - Résultats dans le cas non réversible
 - Dynamique de Langevin non elliptique

- On considère maintenant la dynamique

$$dX_t = -U(X_t) dt + \sqrt{2h} dB_t$$

où $U := \nabla V + b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ régulière telle que :

$$b \cdot \nabla V = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{div}(b) = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^d$$

(ainsi que l'hypothèse à l'infini : $|b(x)| \leq C(1 + |x|)$ sur \mathbb{R}^d)

- On considère maintenant la dynamique

$$dX_t = -U(X_t) dt + \sqrt{2h} dB_t$$

où $U := \nabla V + b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ régulière telle que :

$$b \cdot \nabla V = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{div}(b) = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^d$$

(ainsi que l'hypothèse à l'infini : $|b(x)| \leq C(1 + |x|)$ sur \mathbb{R}^d)

- Propriétés du générateur** $L_{U,h} = -h\Delta + U \cdot \nabla = L_{V,h} + b \cdot \nabla$

- La mesure de Gibbs $w(dx)$ reste **invariante** car :

$$L_{U,h}^\dagger(e^{-\frac{V}{h}}) = L_{V,h}^\dagger(e^{-\frac{V}{h}}) - \operatorname{div}(b e^{-\frac{V}{h}}) = 0$$

- Donc : $b \cdot \nabla$ est anti-symétrique dans L_w^2 et

$$\forall f \in \mathcal{C}_c^\infty, \quad \operatorname{Re} \langle L_{U,h} f, f \rangle_w = \langle L_{V,h} f, f \rangle_w = h \|\nabla f\|_w^2 \geq 0$$

$\Leftrightarrow L_{U,h}$ accréatif (mais plus symétrique si $b \neq 0$)

\Leftrightarrow Processus non réversible (si $b \neq 0$)

- Premières propriétés spectrales :

Proposition 1 (L.P.-Michel 2020)

Il existe $h_0 > 0$ t.q. pour tout $h \in (0, h_0]$:

- 1 *La fermeture $L_{U,h}$ de $(L_{U,h}, C_c^\infty)$ dans L_w^2 est accréitive maximale.*
- 2 *Le spectre de $L_{U,h}$ est discret.*

- **Premières propriétés spectrales :**

Proposition 1 (L.P.-Michel 2020)

Il existe $h_0 > 0$ t.q. pour tout $h \in (0, h_0]$:

- 1 La fermeture $L_{U,h}$ de $(L_{U,h}, C_c^\infty)$ dans L_w^2 est accréitive maximale.
- 2 Le spectre de $L_{U,h}$ est discret.

- **Conséquences :**

- La théorie de Hille-Yosida s'applique : Pour $f \in L_w^2$,
 $u(t, x) = e^{-tL_{U,h}} f \left(= \mathbb{E}^x(f(X_t)) \right)$ bien déf. et : $\partial_t u + L_{U,h} u = 0$

- De plus, **on a toujours**

$$\forall f \in L_w^2, \forall t \geq 0, \quad \|e^{-tL_{U,h}} f - \int f w(dx)\|_w \leq e^{-\lambda_{1,h} t} \|f - \int f w(dx)\|_w$$

et le taux exponentiel $\lambda_{1,h} = \min(\text{Sp}(L_{V,h}) \setminus \{0\})$ est **optimal**

• Premières propriétés spectrales :

Proposition 1 (L.P.-Michel 2020)

Il existe $h_0 > 0$ t.q. pour tout $h \in (0, h_0]$:

- 1 La fermeture $L_{U,h}$ de $(L_{U,h}, C_c^\infty)$ dans L_w^2 est accréitive maximale.
- 2 Le spectre de $L_{U,h}$ est discret.

• Conséquences :

- La théorie de Hille-Yosida s'applique : Pour $f \in L_w^2$,
 $u(t, x) = e^{-tL_{U,h}} f \left(= \mathbb{E}^x(f(X_t)) \right)$ bien déf. et : $\partial_t u + L_{U,h} u = 0$
- De plus, **on a toujours**

$$\forall f \in L_w^2, \forall t \geq 0, \quad \|e^{-tL_{U,h}} f - \int f w(dx)\|_w \leq e^{-\lambda_{1,h} t} \|f - \int f w(dx)\|_w$$

et le taux exponentiel $\lambda_{1,h} = \min(\text{Sp}(L_{V,h}) \setminus \{0\})$ est **optimal**

\hookrightarrow **Donc** : ajouter la partie anti-symétrique $b \cdot \nabla$ à la dynamique ne peut pas "dégrader" la convergence exponentielle vers l'équilibre !

But de notre travail :

1. Décrire précisément le “bas spectre” de $L_{U,h}$ à la limite $h \rightarrow 0$

↔ **Remarque** : Spectre complexe et projecteurs associés non a.a.

2. Obtenir une estimée “hypocoercive” du type :

$$\forall f \in L_w^2, \forall t \geq 0, \quad \|e^{-tL_{U,h}}f - \int f w(dx)\|_w \leq C e^{-\lambda_h^* t} \|f - \int f w(dx)\|_w$$

où :

– $C > 1$ est indépendante de $t > 0$ et de $h > 0$ assez petit,

– $\lambda_h^* > \lambda_{1,h}$ est la “plus petite valeur propre” de $L_{U,h}$

↔ **Conséquence** : Description spectrale de la métastabilité

- 1 Introduction - Dynamiques elliptiques réversibles
 - Dynamique sur-amortie de Langevin réversible
 - Générateur de l'évolution
 - Régime basse température et métastabilité
- 2 **Dynamiques elliptiques non réversibles "associées"**
 - Dynamique sur-amortie de Langevin non réversible
 - **Résultats dans le cas non réversible**
 - Dynamique de Langevin non elliptique

Théorème 3 (L.P.-Michel, 2020)

Il existe $\varepsilon_0, C > 0$ et $h_0 > 0$ t.q., pour tout $h \in (0, h_0]$:

- 1 $\text{Sp}(L_{U,h}) \cap \{\text{Re}(z) \leq \varepsilon_0\}$ est de **cardinal 2** et inclus dans $B(0, e^{-\frac{C}{h}})$
- 2 Pour tout $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$, on a, uniformément par rapport à z :

$$\forall z \in \{\text{Re } z \leq \varepsilon_0\} \cap \{|z| \geq \varepsilon_1\}, \quad \|(z - L_{U,h})^{-1}\|_{L_w^2 \rightarrow L_w^2} = \mathcal{O}(1)$$

Théorème 3 (L.P.-Michel, 2020)

Il existe $\varepsilon_0, C > 0$ et $h_0 > 0$ t.q., pour tout $h \in (0, h_0]$:

- 1 $\text{Sp}(L_{U,h}) \cap \{\text{Re}(z) \leq \varepsilon_0\}$ est de **cardinal 2** et inclus dans $B(0, e^{-\frac{C}{h}})$
- 2 Pour tout $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$, on a, uniformément par rapport à z :

$$\forall z \in \{\text{Re } z \leq \varepsilon_0\} \cap \{|z| \geq \varepsilon_1\}, \quad \|(z - L_{U,h})^{-1}\|_{L_w^2 \rightarrow L_w^2} = \mathcal{O}(1)$$

Quelques conséquences des deux résultats précédents :

- La preuve utilise fortement les propriétés de la partie a.a. $L_{V,h}$
- $\text{Ker } L_{U,h} = \text{Span}\{\mathbf{1}\}$ (car $L_{U,h}(\mathbf{1}) = 0$ et $\text{Re} \langle L_{U,h}f, f \rangle_w = h \|\nabla f\|_w^2$)
- Les mêmes propriétés sont valables pour $L_{U,h}^* = L_{V,h} - b \cdot \nabla$
 $\hookrightarrow \text{Ker } L_{U,h}^* = \text{Span}\{\mathbf{1}\}$
 \hookrightarrow **0 v.p. de $L_{U,h}$ de mult. 1** associée au **projecteur orthogonal $\Pi_{0,h}$**
- $\text{Sp}(L_{U,h}) \cap \{\text{Re}(z) \leq \varepsilon_0\} = \{0, \lambda_h^*\}$ donc $\lambda_h^* \in \mathbb{R}^{+*}$
- Dans $\mathcal{L}(L_w^2)$: $\Pi_{0,h} + \Pi_{\lambda_h^*,h} = \mathcal{O}(1)$ et donc $\Pi_{\lambda_h^*,h} = \mathcal{O}(1)$

À propos de la dynamique classique $dX_t = -(\nabla V + b)(X_t) dt$

• Comportement lorsque $t \rightarrow +\infty$:

- $\{x \in \mathbb{R}^d, \nabla V(x) + b(x) = 0\} = (\nabla V)^{-1}(0) = \{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{s}\}$
- Toute trajectoire converge vers l'un des trois équilibres \mathbf{m}_1 , \mathbf{m}_2 ou \mathbf{s}
- Les équilibres \mathbf{m}_1 et \mathbf{m}_2 sont stables
- L'équilibre \mathbf{s} est instable et en fait un point selle d'après :

Lemme 2 (Landim-Seo 2018, L.P.-Michel 2020, Bony-L.P.-Michel 2022)

Soit $B(\mathbf{s}) := \text{Jac}_{\mathbf{s}} b$ la jacobienne de b en \mathbf{s} .

Alors : $\text{Hess } V(\mathbf{s}) + B(\mathbf{s})$ a une unique v.p. (avec mult.) $\mu \in \{\text{Re } z \leq 0\}$

Plus précisément : $\mu \in \mathbb{R}$ et $\mu < 0$

De plus : Soit $D_1 = \text{Ker}(\text{Hess } V(\mathbf{s}) - \lambda_1)$, où $\lambda_1 = \text{v.p. nég. de Hess } V(\mathbf{s})$

Alors :

$$|\mu| \geq |\lambda_1| \quad \text{et} \quad \mu = \lambda_1 \quad \text{ssi} \quad D_1 = \text{Ker}(\text{Hess } V(\mathbf{s}) + B(\mathbf{s}) - \mu)$$

Formule d'Eyring-Kramers et description la métastabilité :

Théorème 4 (L.P.-Michel 2020)

① La valeur propre λ_h^* de $L_{U,h}$ vérifie :

$$\lambda_h^* = \frac{|\mu| \det \text{Hess } V(\mathbf{m}_2)^{\frac{1}{2}}}{2\pi |\det \text{Hess } V(\mathbf{s})|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{V(\mathbf{s})-V(\mathbf{m}_2)}{h}} (1 + \mathcal{O}(h)),$$

où μ est la valeur propre négative de $\text{Hess } V(\mathbf{s}) + B(\mathbf{s})$.

② Il existe $C > 0$ indépendant de h t.q., pour tous $f \in L_w^2$ et $t \geq 0$,

$$e^{-tL_{U,h}} f = \underbrace{\int f w(dx)}_{=\Pi_{0,h} f} + \underbrace{e^{-t\lambda_h^*} \Pi_{\lambda_h^*,h} f}_{\text{Comportement métastable}} + \mathcal{O}(e^{-tC}) \|f\|_w$$

Conséquence : Comme $\Pi_{\lambda_h^*,h} = \mathcal{O}(1)$, il s'ensuit que :

$$\|e^{-tL_{U,h}} f - \int f w(dx)\|_w = \mathcal{O}(e^{-t\lambda_h^*}) \|f - \int f w(dx)\|_w$$

Commentaires :

- Ce résultat inclut les résultats déjà connus du cas réversible

Commentaires :

- Ce résultat inclut les résultats déjà connus du cas réversible
- **Accélération** de la convergence vers l'équilibre :

$$\frac{\lambda_h^*}{\lambda_{1,h}} \sim \frac{|\mu|}{|\lambda_1|} \geq 1 \quad (> 1 \text{ sauf si direction instable du linéarisé inchangée})$$

Commentaires :

- Ce résultat inclut les résultats déjà connus du cas réversible
- **Accélération** de la convergence vers l'équilibre :

$$\frac{\lambda_h^*}{\lambda_{1,h}} \sim \frac{|\mu|}{|\lambda_1|} \geq 1 \quad (> 1 \text{ sauf si direction instable du linéarisé inchangée})$$

- Notre analyse est en fait valable pour des potentiels V très généraux avec un nombre arbitraire N_0 de minima locaux
 - ↔ Métastabilité décrite par $N_0 - 1$ v.p. expo petites non nulles
 - ↔ Obtention de $N_0 - 1$ formules d'Eyring-Kramers
 - ↔ Sous des hypo. génériques sur V : barrières expo. distinctes
 - ↔ Dans ce cas : la restriction de $L_{U,h}$ à son "petit sous-espace spectral" est **diagonalisable à v.p. réelles** (car $\text{Sp } L_{U,h} = \overline{\text{Sp } L_{U,h}}$)
 - ↔ **Mais** : on ne sait pas le démontrer en général...

Résultats connexes :

- Hérau-Hitrik-Sjöstrand, 2011 : pour l'éq. de Kramers-Fokker-Planck
 - ↔ Situation plus délicate car seulement hypoelliptique
 - ↔ **Mais** utilise la super-symétrie (non valable ici en général) et la PT-symétrie (non valable ici) de façon cruciale

Résultats connexes :

- Hérau-Hitrik-Sjöstrand, 2011 : pour l'éq. de Kramers-Fokker-Planck
 - ↪ Situation plus délicate car seulement hypoelliptique
 - ↪ **Mais** utilise la super-symétrie (non valable ici en général) et la PT-symétrie (non valable ici) de façon cruciale
- Dans le même cadre, **mais** pour les taux de transition
 - Bouchet-Reygner 2016 (calculs heuristiques)
 - Landim-Mariani-Seo 2019, Lee-Seo 2022
 - ↪ Leur résultat principal dans ce cadre :

$$\mathbb{E}[\tau_{\mathbf{m}_2 \rightarrow \mathbf{m}_1}] = \frac{2\pi}{|\mu|} \frac{|\det \text{Hess } V(\mathbf{s})|^{\frac{1}{2}}}{|\det \text{Hess } V(\mathbf{m}_2)|^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{V(\mathbf{s}) - V(\mathbf{m}_2)}{h}} (1 + \mathcal{O}(\sqrt{h |\ln h|^3}))$$

Donc : $\lambda(\mathbf{m}, h) \mathbb{E}[\tau_{\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{m}_0}] \sim 1$ comme dans le cas réversible...

- 1 Introduction - Dynamiques elliptiques réversibles
 - Dynamique sur-amortie de Langevin réversible
 - Générateur de l'évolution
 - Régime basse température et métastabilité
- 2 Dynamiques elliptiques non réversibles "associées"
 - Dynamique sur-amortie de Langevin non réversible
 - Résultats dans le cas non réversible
 - Dynamique de Langevin non elliptique

- On considère enfin la dynamique générale

$$\begin{cases} dx_t = \nabla_v W(v_t) dt \\ dv_t = -\nabla_x V(x_t) dt - \gamma \nabla_v W(v_t) dt + \sqrt{2\gamma h} dB_t \end{cases}$$

où :

- $\gamma > 0$ coefficient de friction
- $V(x), W(v) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ potentiels réguliers ("bien" à l'infini)

- On considère enfin la dynamique générale

$$\begin{cases} dx_t = \nabla_v W(v_t) dt \\ dv_t = -\nabla_x V(x_t) dt - \gamma \nabla_v W(v_t) dt + \sqrt{2\gamma h} dB_t \end{cases}$$

où :

- $\gamma > 0$ coefficient de friction
- $V(x), W(v) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ potentiels réguliers ("bien" à l'infini)

↔ **Générateur** non auto-adjoint et non elliptique :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &:= -\gamma h \Delta_v + \gamma \nabla_v W \cdot \nabla_v - \nabla_v W \cdot \nabla_x + \nabla_x V \cdot \nabla_v \\ &= -\gamma h \operatorname{div}_{x,v} \begin{pmatrix} 0 \nabla_x \\ \nabla_v \end{pmatrix} + \gamma \nabla_{x,v} (V + W) \cdot \begin{pmatrix} 0 \nabla_x \\ \nabla_v \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\nabla_v W \\ \nabla_x V \end{pmatrix}}_{b(x,v)} \cdot \begin{pmatrix} \nabla_x \\ \nabla_v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- On considère enfin la dynamique générale

$$\begin{cases} dx_t = \nabla_v W(v_t) dt \\ dv_t = -\nabla_x V(x_t) dt - \gamma \nabla_v W(v_t) dt + \sqrt{2\gamma h} dB_t \end{cases}$$

où :

- $\gamma > 0$ coefficient de friction
- $V(x), W(v) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ potentiels réguliers ("bien" à l'infini)

↔ **Générateur** non auto-adjoint et non elliptique :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &:= -\gamma h \Delta_v + \gamma \nabla_v W \cdot \nabla_v - \nabla_v W \cdot \nabla_x + \nabla_x V \cdot \nabla_v \\ &= -\gamma h \operatorname{div}_{x,v} \begin{pmatrix} 0 \nabla_x \\ \nabla_v \end{pmatrix} + \gamma \nabla_{x,v}(V + W) \cdot \begin{pmatrix} 0 \nabla_x \\ \nabla_v \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\nabla_v W \\ \nabla_x V \end{pmatrix}}_{b(x,v)} \cdot \begin{pmatrix} \nabla_x \\ \nabla_v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

↔ Mesure invariante $w(dx dv) := Z_h^{-1} e^{-\frac{V+W}{h}}$ et :

$$\nabla_{x,v}(V + W) \cdot b \equiv 0$$

Lemme 3 (Bony-L.P.-Michel 2022)

$$\text{Soit } B(\mathbf{s}, 0) := \text{Jac}_{(\mathbf{s}, 0)} b = \begin{pmatrix} 0 & -\text{Hess } W(0) \\ \text{Hess } V(\mathbf{s}) & 0 \end{pmatrix}$$

Alors : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Hess } V(\mathbf{s}) & 0 \\ 0 & \text{Hess } W(0) \end{pmatrix} + B(\mathbf{s})$ a une seule v.p. $\mu < 0$

Lemme 3 (Bony-L.P.-Michel 2022)

$$\text{Soit } B(\mathbf{s}, 0) := \text{Jac}_{(\mathbf{s}, 0)} b = \begin{pmatrix} 0 & -\text{Hess } W(0) \\ \text{Hess } V(\mathbf{s}) & 0 \end{pmatrix}$$

Alors : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Hess } V(\mathbf{s}) & 0 \\ 0 & \text{Hess } W(0) \end{pmatrix} + B(\mathbf{s})$ a une seule v.p. $\mu < 0$

Théorème 5 (Bony-L.P.-Michel 2022)

Il existe $\varepsilon_0, C > 0$ et $h_0 > 0$ t.q., pour tout $h \in (0, h_0]$:

- 1 $\text{Sp}(\mathcal{L}) \cap \{\text{Re}(z) \leq \varepsilon_0\}$ est de **cardinal 2** et inclus dans $B(0, e^{-\frac{C}{h}})$
- 2 La v.p. λ_h^* expo. petite non nulle de \mathcal{L} est réelle et vérifie :

$$\lambda_h^* = \frac{|\mu| \det \text{Hess } V(\mathbf{m}_2)^{\frac{1}{2}}}{2\pi |\det \text{Hess } V(\mathbf{s})|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{V(\mathbf{s}) - V(\mathbf{m}_2)}{h}} (1 + \mathcal{O}(h)),$$

Conséquence : pour $W(v) := \frac{\|v\|^2}{2}$, on retrouve le résultat d'HHS 2011 :

$$\text{la v.p. négative } \mu \text{ de } \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ \text{Hess } V(\mathbf{s}) & \gamma I_n \end{pmatrix} \text{ est : } \mu = \frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\lambda_1}}{2}$$

Merci pour votre attention !