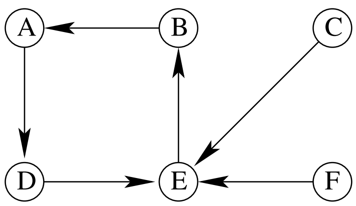
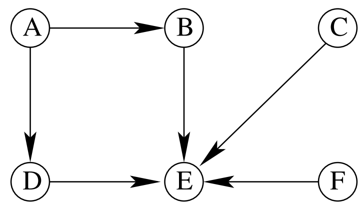
TD Licence 3 – Optimisation et aide à la décision

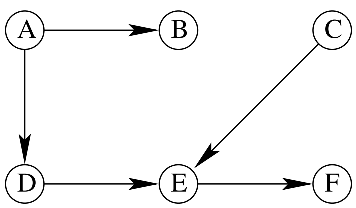
Série 1 - Propriétés élémentaires des graphes

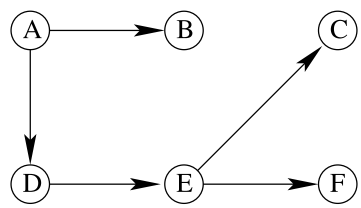
Exercice 1

Parmi les graphes orientés suivants, lesquels sont des dags? Lesquels sont des arborescences?



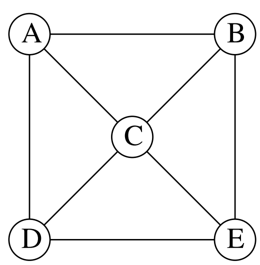






Exercice 2

On considère le graphe suivant:

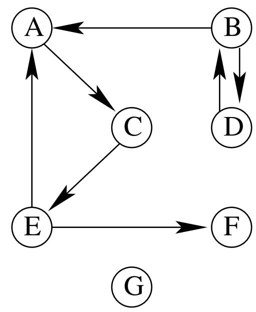


On choisit une base de cycles élémentaires donnée par $C_1 = (ABCA)$, $C_2 = (BECB)$, $C_3 = (EDCE)$ et $C_4 = (DACD)$. On ne tient pas compte de l'origine du cycles, c'est-à-dire qu'on a aussi $C_1 = (BCAB) = (CABC)$, etc.

1. Déterminer $C_1 \oplus C_2$.
2. Déterminer $C_1 \oplus C_2 \oplus C_3$.
3. Décomposer le cycle $(ABEDA)$ sur la base (C_1, C_2, C_3, C_4).
4. Décomposer le cycle $(CABECADEC)$ sur la base (C_1, C_2, C_3, C_4).

Exercice 3

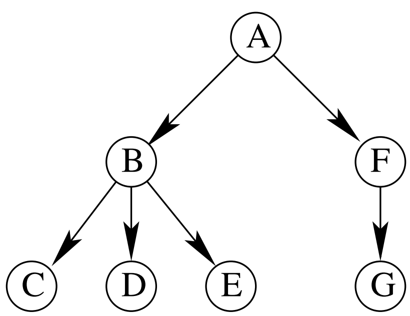
Soit $\mathcal{G}$ le graphe suivant:



1. Déterminer la matrice d'adjacence M du graphe $\mathcal{G}$.
2. Déterminer la clôture transitive de $\mathcal{G}$, ainsi que sa matrice d'adjacence T.
3. Déterminer les composantes fortement connexes de $\mathcal{G}$.
   On notera $C(s)$ la composante fortement connexe d'un sommet s de $\mathcal{G}$.
4. On définit $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ comme le graphe orienté dont les sommets sont les composantes fortement connexes de $\mathcal{G}$, et dont les arcs sont les $C(s) \rightarrow C(s')$ pour lesquels il existe un arc $s \rightarrow s'$ dans le graphe $\mathcal{G}$ avec $C(s) \neq C(s')$.
   Construire le graphe $\mathcal{C}(\mathcal{G})$.
5. Montrer que $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ est un dag.
   Pour un graphe quelconque $\mathcal{X}$, le graphe $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ est-il toujours un dag?
6. Comment peut-on déduire les composantes fortement connexes de $\mathcal{G}$ de la matrice T?

Exercice 4

Déterminer la matrice d'adjacence M de l'arborescence ci-dessous, ainsi que la matrice d'adjacence T de sa clôture transitive.



Pour un graphe général, quelles propriétés de M et T caractérisent une arboresence?