

TD Mathématiques financières

Série 2 – Espérances conditionnelles, martingales

Exercice 1

Une urne contient r boules rouges et b boules blanches ($r, b > 1$). On tire successivement deux boules de l'urne, sans remise. Pour chaque boule rouge, on gagne g Euros, et pour chaque boule blanche on perd p Euros.

1. Expliciter l'espace probabilisé associé au jeu et sa filtration canonique $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$.
2. Soit X_k , $k = 1, 2$, la variables aléatoire représentant le gain total accumulé après k tirages. Déterminer la loi et l'espérance de X_1 et de X_2 .
3. Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X_2|\mathcal{F}_1)$.
4. Pour quelles valeurs de g et p le processus $\{X_k\}_{k \in \{1,2\}}$ est-il une sous-martingale? Une sur-martingale? Une martingale?

Exercice 2

On jette un dé non pipé. Pour chaque 6 obtenu, on gagne g Euros, dans tous les autres cas on perd 1 Euro. Soit X_k la variable aléatoire donnant le gain après k jets du dé.

1. Calculer les espérances conditionnelles $\mathbb{E}(X_\ell|\mathcal{F}_k)$ pour $\ell > k$, par rapport à la filtration canonique $\mathcal{F}_k = \sigma(X_1, \dots, X_k)$.
2. Pour quelles valeurs de g le processus $\{X_k\}_{k \geq 1}$ est-il une sous-martingale? Une sur-martingale? Une martingale?

Exercice 3

1. On lance une pièce de monnaie équilibrée de manière répétée. On dispose initialement de $X_0 = 1$ Euro. Si a chaque jet, la somme somme est multipliée par $r > 1$ si la pièce tombe sur Pile, et divisée par $d > 1$ si elle tombe sur Face, sous quelle condition sur r et d la suite des X_k , donnant la somme dont on dispose au temps k , est-elle une martingale?
2. Vous disposez initialement d'un Euro. Une machine à sous vous rend le double de la mise avec probabilité $1/2$, et rien avec probabilité $1/2$. Vous jouez de manière répétée, en misant à chaque fois une proportion λ de votre capital. Sous quelle condition la suite des valeurs du capital est-elle une martingale?