# TD Mathématiques financières

## Série 2 – Espérances conditionnelles, martingales

### Exercice 1

Dans une expérience consistant à jeter deux tétraèdres parfaitement symétriques, dont les faces sont numérotées de 1 à 4, on considère les variables aléatoires $X$, égale à la somme des points, et $Y$, égale à leur différence (en valeur absolue).

1. Spécifier un espace probabilisé permettant de décrire cette expérience.
2. Déterminer la loi conjointe de $X$ et $Y$ ainsi que leurs espérances.
3. Calculer $\mathbb{E}(X|Y)$ et $\mathbb{E}(Y|X)$.

### Exercice 2

On jette un dé symétrique, puis on jette une pièce de monnaie autant de fois que le dé indique de points. Soit $X$ le nombre de Pile obtenus. Déterminer $\mathbb{E}(X)$.

### Exercice 3

Une urne contient $r$ boules rouges et $b$ boules blanches $(r, b > 1)$. On tire successivement deux boules de l'urne, sans remise. Pour chaque boule rouge, on gagne $g$ Euros, et pour chaque boule blanche on perd $p$ Euros.

1. Expliciter l'espace probabilisé associé au jeu et sa filtration canonique $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$.
2. Soit $X_k$, $k = 1, 2$, la variables aléatoire représentant le gain total accumulé après $k$ tirages. Déterminer la loi et l'espérance de $X_1$ et de $X_2$.
3. Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X_2|\mathcal{F}_1)$.
4. Pour quelles valeurs de $g$ et $p$ le processus $\{X_k\}_{k\in\{1,2\}}$ est-il une sous-martingale? Une sur-martingale? Une martingale?

### Exercice 4

On considère une urne contenant une boule rouge et une boule bleue. Les boules sont indiscernables au toucher. On tire de manière répétée une boule de l'urne, et on la remet en ajoutant une boule de la même couleur. Soit $X_n$ la proportion de boules rouges (le nombre de boules rouges divisé par le nombre total de boules) se trouvant dans l'urne après le $n$ième tirage.

1. Spécifier un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ permettant de décrire les deux premiers tirages, et expliciter la filtration canonique $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$.
2. Donner les lois de $X_0$, $X_1$ et $X_2$.
3. Calculer $\mathbb{E}(X_1|X_0)$ et $\mathbb{E}(X_2|X_1)$.
4. La suite $(X_0, X_1, X_2)$ est-elle une martingale?
5. Généraliser au cas d'un nombre quelconque de tirage.

### Exercice 5

On jette un dé non pipé. Pour chaque 6 obtenu, on gagne $g$ Euros, dans tous les autres cas on perd 1 Euro. Soit $X_k$ la variable aléatoire donnant le gain après $k$ jets du dé.

1. Calculer les espérances conditionnelles $\mathbb{E}(X_{k+1}|\mathcal{F}_k)$, puis $\mathbb{E}(X_\ell|\mathcal{F}_k)$ pour $\ell > k$, par rapport à la filtration canonique $\mathcal{F}_k = \sigma(X_1, \dots, X_k)$.
2. Pour quelles valeurs de $g$ le processus $\{X_k\}_{k\geqslant 1}$ est-il une sous-martingale? Une sur-martingale? Une martingale?

**Exercice 6**

1. On lance une pièce de monnaie équilibrée de manière répétée. On dispose initialement de $X_0 = 1$ Euro. Si a chaque jet, la somme somme est multipliée par $r > 1$ si la pièce tombe sur Pile, et divisée par $d > 1$ si elle tombe sur Face, sous quelle condition sur $r$ et $d$ la suite des $X_k$, donnant la somme dont on dispose au temps $k$, est-elle une martingale?
2. Vous disposez initialement d'un Euro. Une machine à sous vous rend le double de la mise avec probabilité 1/2, et rien avec probabilité 1/2. Vous jouez de manière répétée, en misant à chaque fois une proportion $\lambda$ de votre capital. Sous quelle condition la suite des valeurs du capital est-elle une martingale?
   Déterminer explicitement la loi de $X_n$ dans le cas $\lambda = 1$, c'est-à-dire lorsqu'on mise tout son capital à chaque tour (procéder par récurrence sur $n$).

**Exercice 7**

Un joueur mise sur les résultats des jets indépendants d'une pièce équilibrée. A chaque tour, il mise une somme $S \geqslant 0$. Si la pièce tombe sur Pile, son capital augmente de $S$, si elle tombe sur Face, le joueur perd sa mise et donc son capital diminue de $S$.

Une stratégie populaire en France au XVIIIe siècle est appelée *La* Martingale. Elle est définie comme suit:

- le joueur s'arrête de jouer dès qu'il a gagné la première fois (dès le premier Pile);
- il double sa mise à chaque tour, c'est-à-dire qu'il mise la somme $S_n = 2^n$ au $n$ième tour, tant qu'il n'a pas gagné.

Soit $Y_n$ le capital du joueur au temps $n$ (après $n$ jets de la pièce). On admettra que le capital initial est nul, et que le joueur a le droit de s'endetter d'une somme illimitée, c'est-à-dire que $Y_n$ peut devenir arbitrairement négatif. Soit $X_n$ le capital au temps $n$ d'un joueur misant un Euro à chaque tour.

1. Montrer que la stratégie est prévisible, et écrire $Y_n$ sous la forme $Y_n = (H \cdot X)_n$ en fonction du processus $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$.
2. Montrer que $\{Y_n\}_{n\geqslant 0}$ est une martingale.
3. Déterminer l'image de $Y_n$, sa loi, et discuter son comportement lorsque $n \to \infty$.

On suppose maintenant que la banque n'admet pas que le joueur s'endette de plus qu'une valeur limite $L$ (on pourra supposer que $L = 2^k$ pour un $k \geqslant 1$). Par conséquent, le joueur est obligé de s'arrêter dès que son capital au temps $n$ est inférieur à $-L + 2^{n+1}$. Notons $Z_n$ ce capital.

4. Le processus $Z_n$ est-il une martingale?
5. Déterminer l'image de $Z_n$, sa loi, et discuter son comportement lorsque $n \to \infty$. Commenter les résultats.