

TD Mathématiques financières

Série 1 – Options financières

Exercice 1

On considère le modèle de marché suivant:

Ω	S_0	S_1
ω^1	(1, 5)	(1.05, 5)
ω^2	(1, 5)	(1.05, 10)

1. Montrer que le marché est viable.
2. Calculer la valeur d'acquisition du portefeuille d'un investisseur vendant à découvert $2/5$ de part de titre risqué, et achetant $4/1.05$ parts d'actif sans risque. Calculer les valeurs possibles du portefeuille, après évolution du cours des actifs.
3. Donner la fonction de paiement f de l'option de vente au prix d'exercice $K = 7$. Montrer que le portefeuille ci-dessus permet de couvrir cette option.
4. Calculer l'endettement initial d'un investisseur empruntant $4/1.05$ parts d'actif sans risque, et achetant $2/5$ de part de titre risqué. Calculer les valeurs possibles de ce portefeuille, après évolution du cours des actifs. En déduire que l'acheteur de l'option f pourra, avec ce portefeuille, rembourser sa dette initiale.
5. Caractériser les aménagements de portefeuilles initiaux dont la valeur d'acquisition vaut 1. Combien de parts d'actif risqué doit-on vendre à découvert, de sorte à couvrir l'option dans le premier jeu d'aléa ω^1 ? Vérifier qu'une telle stratégie d'emprunt ne permettra pas de couvrir l'option dans le second jeu d'aléa ω^2 . En conclure que le prix de l'option f est nécessairement supérieur à 1.

Exercice 2

On considère le modèle de marché à deux états sur une période décrit par le tableau suivant (en prix réactualisés):

Ω	\bar{S}_0	\bar{S}_1
ω^1	(1, 5)	(1, 3)
ω^2	(1, 5)	(1, 6)

Une banque émet une option de vente au prix d'exercice (réactualisé) \bar{K} , de fonction de paiement $\bar{f} = (\bar{K} - \bar{S}_1^2)_+$. Déterminer le prix et la stratégie de couverture de cette option en fonction de \bar{K} .