Mathématiques financières

Examen du 29 mars 2010

Durée: 2 heures
Documents autorisés (sauf les corrigés d'exercices non manuscrits)
Les points sont donnés à titre indicatif

Problème 1 [4 points]

Résoudre l'équation différentielle stochastique

$$\mathrm{d}X_t = -\tan(t)X_t\,\mathrm{d}t + \cos(t)\,\mathrm{d}B_t\;, \qquad X_0 = 1\;.$$

Problème 2 [6 points]

On considère les modèles de marchés normalisés ($\mathrm{d}X_0(t) = 0$) suivants :

a.

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_1(t) = \mathrm{d}t + \mathrm{d}B_1(t) - \mathrm{d}B_2(t) + 2\,\mathrm{d}B_3(t)\;, \\ \mathrm{d}X_2(t) = -2\,\mathrm{d}t - 2\,\mathrm{d}B_1(t) + 2\,\mathrm{d}B_2(t) - 4\,\mathrm{d}B_3(t)\;. \end{cases}$$

b.

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_1(t) = 4\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_1(t) + 2\,\mathrm{d}B_2(t)\;, \\ \mathrm{d}X_2(t) = -\,\mathrm{d}B_1(t) + 2\,\mathrm{d}B_2(t)\;, \\ \mathrm{d}X_3(t) = \mathrm{d}t + \mathrm{d}B_2(t)\;. \end{cases}$$

c.

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_1(t) = \mathrm{d}t + \mathrm{d}B_1(t) - \mathrm{d}B_2(t)\;, \\ \mathrm{d}X_2(t) = 2\,\mathrm{d}t - 2\,\mathrm{d}B_1(t) + 2\,\mathrm{d}B_2(t)\;. \end{cases}$$

1. Déterminer lesquels parmi les marchés ci-dessus sont viables.
2. Donner, pour chaque marché non viable, une opportunité d'arbitrage.
3. Déterminer lesquels parmi les marchés viables sont complets.
4. Donner, pour chaque marché incomplet, un exemple de fonction de paiement non atteignable.

Problème 3 [10 points]

On considère le marché financier à 2 titres suivant :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_0(t) &= \rho X_0(t)\,\mathrm{d}t & X_0(0) &= 1\;, \\ \mathrm{d}X_1(t) &= \mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}B(t) & X_1(0) &= x_1\;. \end{aligned}$$

1. Trouver explicitement $X_0(t)$ et $X_1(t)$.
2. Ecrire les équations normalisées, avant puis après la transformation de Girsanov.
3. Exprimer le prix $X_1(t)$ du titre risqué sous forme d'intégrale stochastique par rapport au $\mathbb{Q}$-mouvement Brownien $\widetilde{B}(t)$ (où $\mathbb{Q}$ désigne la mesure de risque neutre).
4. Déterminer le prix d'une option de fonction de paiement $F(\omega) = X_1(T)^2$.
5. Calculer le nombre de parts $\theta_1(t)$ de titre risqué du portefeuille de couverture de l'option ci-dessus.
6. *Question bonus (à faire si vous avez le temps) :* Calculer la valeur $V^\theta(t)$ du portefeuille de couverture en tout temps t, et déterminer le nombre de parts $\theta_0(t)$ de titre non risqué.