Mathématiques financières

Examen du 28 mars 2011

Durée: 2 heures
Documents autorisés (sauf les corrigés d'exercices non manuscrits)
Les points sont donnés à titre indicatif

Problème 1 [6 points]

On considère les modèles de marchés normalisés ($\mathrm{d}X_0(t) = 0$) suivants :

a.
$$\begin{cases} \mathrm{d}X_1(t) = \mathrm{d}t + \mathrm{d}B_1(t) - \mathrm{d}B_2(t) , \\ \mathrm{d}X_2(t) = 2\,\mathrm{d}t - 3\,\mathrm{d}B_1(t) + 3\,\mathrm{d}B_2(t) . \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} \mathrm{d}X_1(t) = \mathrm{d}t + \mathrm{d}B_1(t) - \mathrm{d}B_2(t) + \mathrm{d}B_3(t) , \\ \mathrm{d}X_2(t) = -2\,\mathrm{d}t - 2\,\mathrm{d}B_1(t) + 2\,\mathrm{d}B_2(t) - 2\,\mathrm{d}B_3(t) . \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} \mathrm{d}X_1(t) = -\,\mathrm{d}B_1(t) + \mathrm{d}B_2(t) , \\ \mathrm{d}X_2(t) = \mathrm{d}t + \mathrm{d}B_1(t) , \\ \mathrm{d}X_3(t) = \mathrm{d}t + \mathrm{d}B_2(t) . \end{cases}$$

1. Déterminer lesquels parmi les marchés ci-dessus sont viables.
2. Donner, pour chaque marché non viable, une opportunité d'arbitrage.
3. Déterminer lesquels parmi les marchés viables sont complets.
4. Donner, pour chaque marché incomplet, un exemple de fonction de paiement non atteignable.

Problème 2 [4 points]

Soit $Z_t = \mathrm{e}^{\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}$, où B_t désigne le mouvement Brownien standard et $\sigma > 0$.

1. Exprimer $\mathrm{d}Z_t$ en fonction de Z_t et $\mathrm{d}B_t$.
2. Soit
$$X_t = Z_t Y_t \qquad \text{où} \qquad \mathrm{d}Y_t = \frac{1}{Z_t}\,\mathrm{d}t .$$
Calculer $\mathrm{d}X_t$. En déduire la solution, sous forme d'intégrale d'Itô, de l'EDS
$$\mathrm{d}X_t = \mathrm{d}t + \sigma X_t\,\mathrm{d}B_t .$$

Suite au verso

Problème 3 [10 points]

On considère le marché financier à 2 titres suivant :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_0(t) &= \rho X_0(t)\,\mathrm{d}t & X_0(0) &= 1\ , \\ \mathrm{d}X_1(t) &= \mathrm{d}t + \sigma X_1(t)\,\mathrm{d}B(t) & X_1(0) &= x_1\ . \end{aligned}$$

1. Trouver explicitement $X_0(t)$ et $X_1(t)$. *On pourra utiliser la donnée du Problème 2.*
2. Ecrire les équations normalisées, avant puis après la transformation de Girsanov.
3. Exprimer le prix $X_1(t)$ du titre risqué en fonction du $\mathbb{Q}$-mouvement Brownien $\widetilde{B}(t)$ (où $\mathbb{Q}$ désigne la mesure de risque neutre).
4. Déterminer le prix d'une option de fonction de paiement $F(\omega) = X_1(T)^2$.
5. Calculer le nombre de parts $\theta_1(t)$ de titre risqué du portefeuille de couverture de l'option ci-dessus.