

# Mathématiques financières

## Réponses de l'examen du 26 mars 2012

Ce document contient les réponses des problèmes sous forme succincte. Il ne constitue pas un corrigé détaillé.

### Problème 1 [5 points]

1. Les marchés a. et c. sont viables, b. n'est pas viable.
2.  $\theta(t) = (\theta_0(t), 2, 1)$ , avec  $\theta_0(t)$  tel que le portefeuille soit autofinancé, est une opportunité d'arbitrage du marché b.
3. Le marché a. est incomplet, c. est complet.
4.  $\tilde{B}_1(t)$  est un exemple de fonction de paiement non atteignable du marché a.

### Problème 2 [10 points]

1.  $X_0(t) = e^{\rho t}$  et  $X_1(t) = x_1 e^{(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B(t)}$ .
2.  $d\bar{X}_1(t) = (\alpha - \rho)\bar{X}_1(t) dt + \sigma\bar{X}_1(t) dB(t) = \sigma\bar{X}_1(t) d\tilde{B}(t)$ .
3.  $X_1(t) = x_1 e^{(\rho - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\tilde{B}(t)}$ .
4.  $p(F) = x_1^3 e^{(2\rho + 3\sigma^2)T}$ .
5.  $\theta_1(t) = 3X_1(t)^2 e^{3(\rho + \sigma^2)(T-t)}$ .

### Problème 3 [5 points]

1.  $L = \frac{1}{2}\Delta$ .
- 2.

$$\mathbb{P}^x \{ \tau_A < \tau_B \} = \begin{cases} \frac{R_2 - |x|}{R_2 - R_1} & \text{si } n = 1, \\ \frac{\log(R_2) - \log(\|x\|)}{\log(R_2) - \log(R_1)} & \text{si } n = 2, \\ \frac{\|x\|^{-(n-2)} - R_2^{-(n-2)}}{R_1^{-(n-2)} - R_2^{-(n-2)}} & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

- 3.

$$\mathbb{P}^x \{ \tau_A < \infty \} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, 2, \\ \left( \frac{R_1}{\|x\|} \right)^{n-2} & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

4. En dimensions 1 et 2, le mouvement Brownien atteint presque sûrement toute boule ouverte (on dit qu'il est récurrent). En dimensions supérieures, il y a une probabilité positive que le mouvement Brownien ne touche jamais une boule donnée (on dit qu'il est transient).