Mathématiques financières

Examen du 26 mars 2012

Durée: 2 heures
Documents autorisés (sauf les corrigés d'exercices non manuscrits)
Les points sont donnés à titre indicatif

Problème 1 [5 points]

On considère les modèles de marchés normalisés ($\mathrm{d}X_0(t) = 0$) suivants :

a.
$$\begin{cases} \mathrm{d}X_1(t) = -\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_1(t) - \mathrm{d}B_2(t)\ , \\ \mathrm{d}X_2(t) = \mathrm{d}t + \mathrm{d}B_2(t) - \mathrm{d}B_3(t)\ , \\ \mathrm{d}X_3(t) = \mathrm{d}B_1(t) - \mathrm{d}B_3(t)\ . \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} \mathrm{d}X_1(t) = -\,\mathrm{d}B_1(t) + \mathrm{d}B_2(t)\ , \\ \mathrm{d}X_2(t) = \mathrm{d}t + 2\,\mathrm{d}B_1(t) - 2\,\mathrm{d}B_2(t)\ . \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} \mathrm{d}X_1(t) = \mathrm{d}t + \mathrm{d}B_1(t) - \mathrm{d}B_2(t)\ , \\ \mathrm{d}X_2(t) = 2\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_1(t) + \mathrm{d}B_2(t)\ . \end{cases}$$

1. Déterminer lesquels parmi les marchés ci-dessus sont viables.
2. Donner, pour chaque marché non viable, une opportunité d'arbitrage.
3. Déterminer lesquels parmi les marchés viables sont complets.
4. Donner, pour chaque marché viable incomplet, un exemple de fonction de paiement non atteignable.

Problème 2 [10 points]

On considère le marché financier à 2 titres suivant :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_0(t) &= \rho X_0(t)\,\mathrm{d}t & X_0(0) &= 1\ , \\ \mathrm{d}X_1(t) &= \alpha X_1(t)\,\mathrm{d}t + \sigma X_1(t)\,\mathrm{d}B(t) & X_1(0) &= x_1\ . \end{aligned}$$

1. Trouver explicitement $X_0(t)$ et $X_1(t)$.
2. Ecrire les équations normalisées, avant puis après la transformation de Girsanov.
3. Exprimer le prix $X_1(t)$ du titre risqué en fonction du $\mathbb{Q}$-mouvement Brownien $\widetilde{B}(t)$ (où $\mathbb{Q}$ désigne la mesure de risque neutre).
4. Déterminer le prix d'une option de fonction de paiement $F(\omega) = X_1(T)^3$.
5. Calculer le nombre de parts $\theta_1(t)$ de titre risqué du portefeuille de couverture de l'option ci-dessus.

Suite au verso

Problème 3 [5 points]

On admettra le résultat suivant : Les seules solutions à symétrie sphérique (c'est-à-dire ne dépendant que de la norme euclidienne $\|x\|$ de x) de l'équation

$$\Delta u(x) = 0$$

dans $\mathbb{R}^n$ sont de la forme

$$u(x) = \begin{cases} c_1 + c_2|x| & \text{si } n = 1 \;, \\ c_1 + c_2 \log(\|x\|) & \text{si } n = 2 \;, \\ c_1 + \frac{c_2}{\|x\|^{n-2}} & \text{si } n \geqslant 3 \;, \end{cases}$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

On se donne des constantes $R_2 > R_1 > 0$. Soit

$$\begin{aligned} A &= \left\{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| < R_1\right\} \;, \\ B &= \left\{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| > R_2\right\} \;. \end{aligned}$$

Soit enfin $X_t = x + B_t$ le mouvement Brownien dans $\mathbb{R}^n$ démarrant en x. On dénote par τ_A, repectivement τ_B, le temps de premier passage de X_t dans A, respectivement B.

1. Donner le générateur infinitésimal L du processus X_t.
2. Déterminer, en fonction de n, la probabilité

$$u(x) = \mathbb{P}^x\left\{\tau_A < \tau_B\right\}$$

   que X_t atteigne A avant B.
3. En faisant tendre R_2 vers $+\infty$, en déduire, en fonction de n,

$$\mathbb{P}^x\left\{\tau_A < \infty\right\} \;.$$

4. Interpréter ce résultat.