

## Mathématiques financières

### Réponses de l'examen du 25 mars 2013

Ce document contient les réponses des problèmes sous forme succincte. Il ne constitue pas un corrigé détaillé.

#### Problème 1 [5 points]

1.  $X_t = \cos(t)(1 + B_t)$ .
2.  $Y_t = \sqrt{1 + 2t} e^{2B_t}$ .

#### Problème 2 [5 points]

1. Les marchés b. et c. sont viables, a. n'est pas viable.
2.  $\theta(t) = (\theta_0(t), -1, 1, 1)$ , avec  $\theta_0(t)$  tel que le portefeuille soit autofinancé, est une opportunité d'arbitrage du marché a.
3. Le marché b. est incomplet, c. est complet.
4.  $\tilde{B}_1(T)$  est un exemple de fonction de paiement non atteignable du marché b.

#### Problème 3 [10 points]

1.  $X_0(t) = e^{\rho t}$  et  $X_1(t) = x_1 e^{\alpha t} + \sigma \int_0^t e^{\alpha(t-s)} dB(s)$ .
2.  $d\bar{X}_1(t) = (\alpha - \rho)\bar{X}_1(t) dt + \sigma e^{-\rho t} dB(t) = \sigma e^{-\rho t} d\tilde{B}(t)$ .
3.  $X_1(t) = x_1 e^{\rho t} + \sigma \int_0^t e^{\rho(t-s)} d\tilde{B}(s)$ .
4.  $p(F) = x_1^2 e^{\rho T} + \frac{\sigma^2}{\rho} \sinh(\rho T)$ .
5.  $\theta_1(t) = 2 e^{\rho(T-t)} X_1(t)$ .
6.  $p(F) = \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k}{2j} v_T^j (2j-1)!! x_1^{k-2j} e^{(k-2j-1)\rho T}$ ,  
où  $v_T = \frac{\sigma^2}{2\rho} (e^{2\rho T} - 1)$  et  $(2j-1)!! = (2j-1)(2j-3) \dots 3 \cdot 1$  est le moment d'ordre  $2j$  d'une variable aléatoire normale standard (et on a posé  $(-1)!! = 1$ ).