

Mathématiques financières

Réponses de l'examen du 25 mars 2013

Ce document contient les réponses des problèmes sous forme succincte. Il ne constitue pas un corrigé détaillé.

Problème 1 [5 points]

1. $X_t = \cos(t)(1 + B_t)$.
2. $Y_t = \sqrt{1 + 2t} e^{2B_t}$.

Problème 2 [5 points]

1. Les marchés b. et c. sont viables, a. n'est pas viable.
2. $\theta(t) = (\theta_0(t), -1, 1, 1)$, avec $\theta_0(t)$ tel que le portefeuille soit autofinancé, est une opportunité d'arbitrage du marché a.
3. Le marché b. est incomplet, c. est complet.
4. $\tilde{B}_1(T)$ est un exemple de fonction de paiement non atteignable du marché b.

Problème 3 [10 points]

1. $X_0(t) = e^{\rho t}$ et $X_1(t) = x_1 e^{\alpha t} + \sigma \int_0^t e^{\alpha(t-s)} dB(s)$.
2. $d\bar{X}_1(t) = (\alpha - \rho)\bar{X}_1(t) dt + \sigma e^{-\rho t} dB(t) = \sigma e^{-\rho t} d\tilde{B}(t)$.
3. $X_1(t) = x_1 e^{\rho t} + \sigma \int_0^t e^{\rho(t-s)} d\tilde{B}(s)$.
4. $p(F) = x_1^2 e^{\rho T} + \frac{\sigma^2}{\rho} \sinh(\rho T)$.
5. $\theta_1(t) = 2 e^{\rho(T-t)} X_1(t)$.
6. $p(F) = \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k}{2j} v_T^j (2j-1)!! x_1^{k-2j} e^{(k-2j-1)\rho T}$,
où $v_T = \frac{\sigma^2}{2\rho} (e^{2\rho T} - 1)$ et $(2j-1)!! = (2j-1)(2j-3) \dots 3 \cdot 1$ est le moment d'ordre $2j$ d'une variable aléatoire normale standard (et on a posé $(-1)!! = 1$).