Mathématiques financières

Examen du 25 mars 2013

Durée: 2 heures
Documents manuscrits autorisés
Les points sont donnés à titre indicatif

Problème 1 [5 points]

Résoudre les équations différentielles stochastiques suivantes :

1. $$\mathrm{d}X_t = -\frac{\sin(t)}{\cos(t)} X_t \,\mathrm{d}t + \cos(t)\,\mathrm{d}B_t \;, \qquad X_0 = 1 \;.$$

2. $$\mathrm{d}Y_t = \frac{3+4t}{1+2t} Y_t \,\mathrm{d}t + 2Y_t\,\mathrm{d}B_t \;, \qquad Y_0 = 1 \;.$$

Dans les deux cas, vérifier la réponse obtenue à l'aide de la formule d'Itô.

Problème 2 [5 points]

On considère les modèles de marchés normalisés ($\mathrm{d}X_0(t) = 0$) suivants :

a.
$$\begin{cases} \mathrm{d}X_1(t) = \mathrm{d}t + \mathrm{d}B_1(t) + \mathrm{d}B_2(t) \;, \\ \mathrm{d}X_2(t) = \mathrm{d}t + \mathrm{d}B_1(t) + 2\,\mathrm{d}B_2(t) \;, \\ \mathrm{d}X_3(t) = \mathrm{d}t - \mathrm{d}B_2(t) \;. \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} \mathrm{d}X_1(t) = \mathrm{d}t + \mathrm{d}B_1(t) - \mathrm{d}B_2(t) + \mathrm{d}B_3(t) \;, \\ \mathrm{d}X_2(t) = 2\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_1(t) + \mathrm{d}B_2(t) + \mathrm{d}B_3(t) \;. \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} \mathrm{d}X_1(t) = 2\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_1(t) + \mathrm{d}B_2(t) \;, \\ \mathrm{d}X_2(t) = \mathrm{d}B_2(t) - \mathrm{d}B_3(t) \;, \\ \mathrm{d}X_3(t) = \mathrm{d}B_1(t) - \mathrm{d}B_3(t) \;. \end{cases}$$

1. Déterminer lesquels parmi les marchés ci-dessus sont viables.
2. Donner, pour chaque marché non viable, une opportunité d'arbitrage.
3. Déterminer lesquels parmi les marchés viables sont complets.
4. Donner, pour chaque marché viable incomplet, un exemple de fonction de paiement non atteignable.

Suite au verso

Problème 3 [10 points]

On considère le marché financier à 2 titres suivant :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_0(t) &= \rho X_0(t)\,\mathrm{d}t & X_0(0) &= 1\ , \\ \mathrm{d}X_1(t) &= \alpha X_1(t)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}B(t) & X_1(0) &= x_1\ . \end{aligned}$$

1. Trouver explicitement $X_0(t)$ et $X_1(t)$.
2. Ecrire les équations normalisées, avant puis après la transformation de Girsanov.
3. Exprimer le prix $X_1(t)$ du titre risqué en fonction du $\mathbb{Q}$-mouvement Brownien $\widetilde{B}(t)$ (où $\mathbb{Q}$ désigne la mesure de risque neutre).
4. Déterminer le prix d'une option de fonction de paiement $F(\omega) = X_1(T)^2$.
5. Calculer le nombre de parts $\theta_1(t)$ de titre risqué du portefeuille de couverture de l'option ci-dessus.
6. *Question bonus :* Donner une expression du prix d'une option de fonction de paiement $F(\omega) = X_1(T)^k$ pour tout $k \geqslant 2$.