Mathématiques financières

Examen du 23 mars 2009

Durée: 2 heures
Documents autorisés
Les points sont donnés à titre indicatif

Problème 1 [6 points]

On lance un dé (équilibré). Soit N le nombre de points indiqués par le dé.
On lance ensuite N pièces de monnaie (équilibrées et indépendantes). En d'autres termes, si le dé indique 1, on lance une pièce, s'il indique 2 on lance deux pièces, etc. Soit Y le nombre de Pile obtenus.

1. Spécifier un espace probabilisé modélisant cette expérience.
2. Décrire briévement la tribu $\mathcal{F}_1 = \sigma(N)$.
3. Calculer $\mathbb{E}(Y|N) = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_1)$.
4. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Problème 2 [6 points]

On considère le modèle de marché réactualisé décrit par le tableau:

Ω	$\overline{S}_0$	$\overline{S}_1$	$\overline{S}_2$
ω^1	$(1,5)$	$(1,3)$	$(1,2)$
ω^2	$(1,5)$	$(1,3)$	$(1,5)$
ω^3	$(1,5)$	$(1,6)$	$(1,x)$
ω^4	$(1,5)$	$(1,6)$	$(1,10)$

1. Pour quelles valeurs de x le marché est-il viable?
2. On considère une option d'achat de prix d'exercice réactualisé $\overline{K} = 7$. Sa fonction de paiement est donc $g(\overline{S}_2^2) = (\overline{S}_2^2 - 7)_+$. Déterminer le prix de cette option.
3. Donner explicitement le portefeuille de couverture de l'option ci-dessus pour $x = 5$.

Problème 3 [8 points]

On suppose que le prix réactualisé d'un titre risqué évolue selon l'équation différentielle stochastique

$$\mathrm{d}S_t = \sqrt{2 + \sin t}\, S_t \,\mathrm{d}B_t$$

1. Déterminer $\mathrm{d}(\log S_t)$ à l'aide de la formule d'Itô.
2. Calculer l'espérance, la variance et la loi de $\log S_t$.
3. Trouver S_t, en supposant $S_0 = 1$.
4. Montrer que S_t est une martingale.
5. Indiquer, sans faire les calculs, comment déterminer le prix d'une option de vente dans ce marché.