Mathématiques financières

Examen du 19 mars 2008

Durée: 2 heures
Documents autorisés
Les points sont donnés à titre indicatif

Problème 1 [6 points]

Une urne contient 2 billets de 100$ et n billets de 1$. Ces billets sont indiscernables au toucher.

Un joueur participe au jeu suivant. Il possède initialement 100$ (dix billets de 10$). A chaque tour, il glisse un billet de 10$ dans l'urne. Le meneur de jeu brasse le contenu de l'urne, puis le joueur tire un billet de l'urne. On dénote par X_k la somme en possession du joueur après k tours.

1. Calculer $\mathbb{E}[X_1]$. Déterminer n de façon que le jeu soit équitable.
2. Soit $\mathcal{F}_1 = \sigma(X_1)$. Calculer $\mathbb{E}[X_2|\mathcal{F}_1]$.
3. Le processus (X_0, X_1, X_2) est-il une martingale?

Problème 2 [8 points]

On considère le modèle de marché réactualisé décrit par le tableau:

Ω	$\overline{S}_0$	$\overline{S}_1$	$\overline{S}_2$
ω^1	$(1,4)$	$(1,3)$	$(1,2)$
ω^2	$(1,4)$	$(1,3)$	$(1,6)$
ω^3	$(1,4)$	$(1,6)$	$(1,5)$
ω^4	$(1,4)$	$(1,6)$	$(1,10)$

1. Neutraliser ce marché financier, c'est-à-dire déterminer la mesure de risque neutre $\mathbb{P}^*$.
2. On considère une option de vente de prix d'exercice réactualisé $\overline{K} = 7$. Sa fonction de paiement est donc $g(\overline{S}_2^2) = (7 - \overline{S}_2^2)_+$. Déterminer le prix de cette option.
3. Donner explicitement le portefeuille de couverture de l'option ci-dessus.

Problème 3 [6 points]

Soit $\{B_t\}_{t \geqslant 0}$ un mouvement Brownien standard. On considère les deux processus stochastiques

$$X_t = \int_0^t \mathrm{e}^s \,\mathrm{d}B_s \,, \qquad Y_t = \mathrm{e}^{-t} X_t \,.$$

1. Déterminer $\mathbb{E}[X_t]$, $\mathrm{Var}(X_t)$, $\mathbb{E}[Y_t]$ et $\mathrm{Var}(Y_t)$.
2. Spécifier la loi de X_t et de Y_t.
3. Exprimer $\mathrm{d}Y_t$ en fonction de Y_t et de B_t.