TD Mathématiques financières

Série 2 – Equations différentielles stochastiques

Exercice 1

On considère l'équation

$$\mathrm{d}X_t = a(t)X_t\,\mathrm{d}t + b(t)\,\mathrm{d}t + c(t)\,\mathrm{d}B_t\ ,$$

où $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ sont des processus adaptés.

Résoudre cette équation par la méthode de la variation de la constante, c'est-à-dire

1. Soit $\alpha(t) = \int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s$. Vérifier que $X_0\,\mathrm{e}^{\alpha(t)}$ est la solution de l'équation homogène, c-à-d avec $b = c = 0$.
2. Poser $Y_t = \mathrm{e}^{-\alpha(t)}\,X_t$ et calculer $\mathrm{d}Y_t$ à l'aide de la formule d'Itô.
3. En déduire Y_t puis X_t sous forme intégrale.
4. Résoudre l'EDS

$$\mathrm{d}X_t = -\frac{1}{1+t}X_t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}B_t\ , \qquad X_0 = 0\ .$$

Exercice 2

Soit le processus

$$X_t = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t g(s)\,\mathrm{d}B_s\ ,$$

où $f(t)$ et $g(t)$ sont des processus adaptés.

1. Soit $Y_t = \mathrm{e}^{X_t}$. Calculer $\mathrm{d}Y_t$ à l'aide de la formule d'Itô.
2. En déduire la solution de l'équation

$$\mathrm{d}Y_t = a(t)Y_t\,\mathrm{d}t + b(t)Y_t\,\mathrm{d}B_t\ .$$

Exercice 3

Résoudre l'EDS

$$\mathrm{d}X_t = -\frac{1}{2}X_t\,\mathrm{d}t + \sqrt{1-X_t^2}\,\mathrm{d}B_t\ , \qquad X_0 = 0$$

à l'aide du changement de variable $Y = \mathrm{Arcsin}(X)$.

Exercice 4

1. En utilisant l'exercice 1, résoudre l'EDS:

$$\mathrm{d}X_t = \frac{b - X_t}{1-t}\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t\ , \qquad 0 \leqslant t < 1\ , \quad X_0 = a\ .$$

2. Déterminer la variance de X_t. Calculer $\lim_{t\to 1_-} X_t$ dans L^2.
3. Le processus X_t est appelé un pont Brownien — expliquer pourquoi.