TD Mathématiques financières

Série 1 – Intégrales stochastiques

Exercice 1

Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction déterministe, de carré intégrable, et soit

$$X_t = \int_0^t h(s)\,\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^t h(s)^2\,\mathrm{d}s \ .$$

Soit $Y_t = \mathrm{e}^{X_t}$.

1. Calculer $\mathrm{d}Y_t$ à l'aide de la formule d'Itô.
2. Soit N une variable aléatoire normale centrée, de variance σ^2. Montrer que

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^N\right) = \mathrm{e}^{\sigma^2/2}$$

3. En déduire que Y_t est une martingale.
4. Calculer $\mathbb{E}\left(Y_t\right)$.

Exercice 2

On considère les deux processus stochastiques

$$X_t = \int_0^t \mathrm{e}^s\,\mathrm{d}B_s \ , \qquad Y_t = \mathrm{e}^{-t}\,X_t \ .$$

1. Déterminer $\mathbb{E}\left(X_t\right)$, $\mathrm{Var}(X_t)$, $\mathbb{E}\left(Y_t\right)$ et $\mathrm{Var}(Y_t)$.
2. Spécifier la loi de X_t et de Y_t.
3. Montrer que Y_t converge en loi vers une variable Y_∞ lorsque $t \to \infty$ et spécifier sa loi.
4. Exprimer $\mathrm{d}Y_t$ en fonction de Y_t et de B_t.

Exercice 3

Soit

$$X_t = \int_0^t s\,\mathrm{d}B_s \ .$$

1. Calculer $\mathbb{E}\left(X_t\right)$ et $\mathrm{Var}(X_t)$.
2. Quelle est la loi de X_t?
3. Calculer $\mathrm{d}(tB_t)$ à l'aide de la formule d'Itô.
4. En déduire une relation entre X_t et

$$Y_t = \int_0^t B_s\,\mathrm{d}s \ .$$

5. Calculer la variance de Y_t,
   (a) directement à partir de sa définition;
   (b) en calculant d'abord la covariance de B_t et X_t, à l'aide d'une partition de $[0, t]$.

   En déduire la loi de Y_t.