TD Master 2 – Mathématiques financières

Corrigé Série 1 – Intégrales stochastiques

Exercice 1

Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction déterministe, de carré intégrable, et soit

$$X_t = \int_0^t h(s)\,\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^t h(s)^2\,\mathrm{d}s\ .$$

Soit $Y_t = \mathrm{e}^{X_t}$.

1. *Calculer $\mathrm{d}Y_t$ à l'aide de la formule d'Itô.*

   Comme
   $$\mathrm{d}X_t = h(t)\,\mathrm{d}B_t - \frac{1}{2}h(t)^2\,\mathrm{d}t\ ,$$
   la formule d'Itô (avec $u(t,x) = \mathrm{e}^x$ et $\mathrm{d}X_t^2 = h(t)^2\,\mathrm{d}t$) donne
   $$\begin{aligned}\mathrm{d}Y_t &= \mathrm{e}^{X_t}\,\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{X_t}\,\mathrm{d}X_t^2 \\ &= \mathrm{e}^{X_t}\,h(t)\,\mathrm{d}B_t - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{X_t}\,h(t)^2\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{X_t}\,h(t)^2\,\mathrm{d}t \\ &= h(t)Y_t\,\mathrm{d}B_t\ .\end{aligned}$$

2. *Soit N une variable aléatoire normale centrée, de variance σ^2. Montrer que*
   $$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^N\right) = \mathrm{e}^{\sigma^2/2}$$

   En complétant le carré $[x - x^2/2\sigma^2 = \sigma^2/2 - (x-\sigma^2)^2/2\sigma^2]$, il vient
   $$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^N\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^x\,\frac{\mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\sigma^2/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-(x-\sigma^2)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\sigma^2/2}\ .$$

3. *En déduire que Y_t est une martingale.*

   Soit $t > s \geqslant 0$. On peut écrire
   $$Y_t = Y_s \exp\left\{\int_s^t h(u)\ \mathrm{d}B_u - \frac{1}{2}\int_s^t h(u)^2\ \mathrm{d}u\right\} = \mathrm{e}^{-\beta/2}\,Y_s\,\mathrm{e}^N$$
   avec $\beta = \displaystyle\int_s^t h(u)^2\ \mathrm{d}u$ et $N = \displaystyle\int_s^t h(u)\ \mathrm{d}B_u$. Comme $Y_s \subseteq \mathcal{F}_s$ et $N \perp \mathcal{F}_s$,
   $$\mathbb{E}\left(Y_t|\mathcal{F}_s\right) = \mathrm{e}^{-\beta/2}\,Y_s\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^N\right)\ .$$
   Or N suit une loi normale centrée, de variance β en vertu de l'isométrie d'Itô. Par conséquent, $\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^N\right) = \mathrm{e}^{\beta/2}$, ce qui implique la propriété de martingale $\mathbb{E}\left(Y_t|\mathcal{F}_s\right) = Y_s$.

   Remarque: Un autre raisonnement possible est d'observer qu'en vertu de 1.,
   $$Y_t = Y_0 + \int_0^t h(s)Y_s\ \mathrm{d}B_s$$
   qui est une martingale, puisque c'est l'intégrale d'Itô d'un processus adapté.

4. *Calculer $\mathbb{E}\left(Y_t\right)$.*

   Y_t étant une martingale, on a $\mathbb{E}\left(Y_t\right) = \mathbb{E}\left(Y_t|\mathcal{F}_0\right) = \mathbb{E}\left(Y_0\right) = 1$.

Exercice 2

On considère les deux processus stochastiques

$$X_t = \int_0^t \mathrm{e}^s \,\mathrm{d}B_s \;, \qquad Y_t = \mathrm{e}^{-t} X_t \;.$$

1. *Déterminer* $\mathbb{E}(X_t)$, $\mathrm{Var}(X_t)$, $\mathbb{E}(Y_t)$ *et* $\mathrm{Var}(Y_t)$.

   X_t étant l'intégrale d'un processus adapté, on a $\mathbb{E}(X_t) = 0$.
   Par conséquent, l'isométrie d'Itô donne $\mathrm{Var}(X_t) = \mathbb{E}(X_t^2) = \int_0^t \mathrm{e}^{2s} \,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}[\mathrm{e}^{2t} - 1]$.
   Enfin, par linéarité $\mathbb{E}(Y_t) = 0$ et par bilinéarité $\mathrm{Var}(Y_t) = \mathrm{e}^{-2t} \mathrm{Var}(X_t) = \frac{1}{2}[1 - \mathrm{e}^{-2t}]$.

2. *Spécifier la loi de* X_t *et de* Y_t.

   Etant des intégrales stochastiques de fonctions déterministes, X_t et Y_t suivent des lois normales (centrées, de variance calculée ci-dessus).

3. *Montrer que* Y_t *converge en loi vers une variable* Y_∞ *lorsque* $t \to \infty$ *et spécifier sa loi.*

   La fonction caractéristique de Y_t est $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,uY_t}) = \mathrm{e}^{-u^2 \mathrm{Var}(Y_t)/2}$. Elle converge donc vers $\mathrm{e}^{-u^2/4}$ lorsque $t \to \infty$. Par conséquent, Y_t converge en loi vers une variable Y_∞, de loi normale centrée de variance $1/2$.

4. *Exprimer* $\mathrm{d}Y_t$ *en fonction de* Y_t *et de* B_t.

   La formule d'Itô avec $u(t, x) = \mathrm{e}^{-t} x$ donne

   $$\mathrm{d}Y_t = -\,\mathrm{e}^{-t} X_t \,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}X_t = -Y_t \,\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t \;.$$

   Y_t est appelé *processus d'Ornstein–Uhlenbeck.*

Exercice 3

Soit

$$X_t = \int_0^t s \,\mathrm{d}B_s \;.$$

1. *Calculer* $\mathbb{E}(X_t)$ *et* $\mathrm{Var}(X_t)$.

   X_t étant l'intégrale d'un processus adapté, on a $\mathbb{E}(X_t) = 0$.
   Par conséquent, l'isométrie d'Itô donne $\mathrm{Var}(X_t) = \mathbb{E}(X_t^2) = \int_0^t s^2 \,\mathrm{d}s = \frac{1}{3}t^3$.

2. *Quelle est la loi de* X_t *?*

   X_t suit une loi normale centrée de variance $\frac{1}{3}t^3$.

3. *Calculer* $\mathrm{d}(tB_t)$ *à l'aide de la formule d'Itô.*

   La formule d'Itô avec $u(t, x) = tx$ donne $\mathrm{d}(tB_t) = B_t \,\mathrm{d}t + t \,\mathrm{d}B_t$.

4. *En déduire une relation entre* X_t *et*

   $$Y_t = \int_0^t B_s \,\mathrm{d}s \;.$$

   Comme $B_s \,\mathrm{d}s = \mathrm{d}(sB_s) - s \,\mathrm{d}B_s$, on a la formule d'intégration par parties

   $$Y_t = \int_0^t \mathrm{d}(sB_s) - \int_0^t s \,\mathrm{d}B_s = tB_t - X_t \;.$$

   Y_t suit donc une loi normale de moyenne nulle.

5. *Calculer la variance de Y_t,*

   (a) *directement à partir de sa définition;*

   Comme $\mathbb{E}\,(B_s B_u) = s \wedge u$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,(Y_t^2) &= \mathbb{E} \int_0^t \int_0^t B_s B_u \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}u = \int_0^t \int_0^t (s \wedge u)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^t \left[\int_0^u s\,\mathrm{d}s + \int_u^t u\,\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}u = \int_0^t \left[\frac{1}{2}u^2 + ut - u^2\right]\mathrm{d}u = \frac{1}{3}t^3 \,.\end{aligned}$$

   (b) *en calculant d'abord la covariance de B_t et X_t, à l'aide d'une partition de $[0,t]$.*

   Pour calculer la covariance, on introduit une partition $\{t_k\}$ de $[0,t]$, d'espacement $1/n$. Alors

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(B_t, X_t) &= \mathbb{E}\,(B_t X_t) \\ &= \mathbb{E} \int_0^t s B_t \,\mathrm{d}B_s \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_k t_{k-1} \mathbb{E}\,(B_t(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_k t_{k-1}(t_k - t_{k-1}) \\ &= \int_0^t s\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}t^2 \,.\end{aligned}$$

   Il suit que

$$\operatorname{Var}(Y_t) = \operatorname{Var}(tB_t) + \operatorname{Var}(X_t) - 2\operatorname{cov}(tB_t, X_t) = t^3 + \frac{1}{3}t^3 - 2t\operatorname{cov}(B_t, X_t) = \frac{1}{3}t^3 \,.$$

   En déduire la loi de Y_t.

   $Y_t = tB_t - X_t$ étant une combinaison linéaire de variables normales centrés, elle suit également une loi normale centrée, en l'occurrence de variance $t^3/3$. Remarquons que Y_t représente l'aire (signée) entre la trajectoire Brownienne et l'axe des abscisses.