TD Mathématiques financières

Série 3 – Diffusions

Exercice 1

On considère la diffusion définie par l'équation

$$\mathrm{d}X_t = -X_t\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t$$

(processus d'Ornstein–Uhlenbeck).

1. Donner le générateur L associé et son adjoint L^*.
2. Soit $\rho(x) = \pi^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-x^2}$. Calculer $L^*\rho(x)$. Que peut-on en conclure?

Exercice 2

On considère la diffusion définie par l'équation

$$\mathrm{d}X_t = X_t\,\mathrm{d}B_t\ .$$

1. Donner le générateur L associé.
2. Trouver la solution générale de l'équation $Lu = 0$.
3. En déduire $\mathbb{P}^{\,x}\{\tau_a < \tau_b\}$, où τ_a dénote le temps de premier passage de X_t en a.
   Indication: Il s'agit de calculer $\mathbb{E}^x(\psi(X_\tau))$, où τ est le temps de première sortie de $[a,b]$, et $\psi(a) = 1$, $\psi(b) = 0$.

Exercice 3

On considère plus généralement la diffusion définie par l'équation

$$\mathrm{d}X_t = rX_t\,\mathrm{d}t + X_t\,\mathrm{d}B_t\ , \qquad r \in \mathbb{R}$$

(mouvement Brownien géométrique).

1. Calculer son générateur L.
2. Montrer que si $r \neq 1/2$, la solution générale de l'équation $Lu = 0$ s'écrit

   $$u(x) = c_1 x^\gamma + c_2\ ,$$

   où γ est une fonction de r qu'on déterminera.
3. On suppose $r < 1/2$. Calculer $\mathbb{P}^{\,x}\{\tau_b < \tau_a\}$ pour $0 < a < x < b$, puis $\mathbb{P}^{\,x}\{\tau_b < \tau_0\}$ en faisant tendre a vers 0. On remarquera que si $X_{t_0} = 0$ alors $X_t = 0$ pour tout $t \geqslant t_0$. Par conséquent si $\tau_0 < \tau_b$, alors X_t n'atteindra jamais b. Quelle est la probabilité que cela arrive?
4. On suppose maintenant $r > 1/2$.
   (a) Calculer $\mathbb{P}^{\,x}\{\tau_a < \tau_b\}$ pour $0 < a < x < b$, et montrer que cette probabilité tend vers 0 pour tout $x \in]a,b[$ lorsque $a \to 0_+$. En conclure que presque sûrement, X_t n'atteindra jamais 0 dans cette situation.
   (b) Trouver α et β tels que $u(x) = \alpha \log x + \beta$ satisfasse le problème

   $$\begin{cases} (Lu)(x) = -1 & \text{si } 0 < x < b\ , \\ u(x) = 0 & \text{si } x = b\ . \end{cases}$$

   (c) En déduire $\mathbb{E}^x(\tau_b)$.