TD Master 2 – Mathématiques financières

Corrigé Série 5 – Portefeuilles de couverture

Exercice 1

On considère le marché financier à 2 titres suivant :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_0(t) &= \rho X_0(t)\,\mathrm{d}t & X_0(0) &= 1\;, \\ \mathrm{d}X_1(t) &= \alpha X_1(t)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}B(t) & X_1(0) &= x_1\;. \end{aligned}$$

1. *Trouver explicitement $X_0(t)$ et $X_1(t)$.*

$$X_0(t) = \mathrm{e}^{\rho t}\;, \qquad X_1(t) = x_1\,\mathrm{e}^{\alpha t} + \sigma \int_0^t \mathrm{e}^{\alpha(t-s)}\,\mathrm{d}B(s)$$

(voir la série 2).

2. *Normaliser le marché et déterminer la mesure de risque neutre $\mathbb{Q}$.*

En appliquant la formule d'Itô à $\overline{X}_1(t) = \mathrm{e}^{-\rho t} X_1(t)$, on obtient

$$\mathrm{d}\overline{X}_1(t) = (\alpha-\rho)\overline{X}_1(t)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{e}^{-\rho t}\,\mathrm{d}B(t)\;.$$

La mesure de risque neutre est définie par

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}} = \exp\biggl\{-\int_0^T u(t)\,\mathrm{d}B(t) - \frac12\int_0^t u(t)^2\,\mathrm{d}t\biggr\}\;,$$

avec

$$\sigma\,\mathrm{e}^{-\rho t}\,u(t) = (\alpha-\rho)\overline{X}_1(t) \qquad \Rightarrow \qquad u(t) = \frac{\alpha-\rho}{\sigma}\,\mathrm{e}^{\rho t}\,\overline{X}_1(t) = \frac{\alpha-\rho}{\sigma}X_1(t)\;.$$

3. *Ecrire et résoudre les équations du marché non normalisé par rapport au $\mathbb{Q}$-mouvement Brownien $\widetilde{B}(t)$.*

La transformation de Girsanov donne l'équation

$$\mathrm{d}\overline{X}_1(t) = \sigma\,\mathrm{e}^{-\rho t}\,\mathrm{d}\widetilde{B}(t)\;.$$

En appliquant à nouveau la formule d'Itô à $X_1(t) = \mathrm{e}^{\rho t}\,\overline{X}_1(t)$, on obtient l'équation

$$\mathrm{d}X_1(t) = \rho X_1(t)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}\widetilde{B}(t)\;,$$

dont la solution est

$$X_1(t) = x_1\,\mathrm{e}^{\rho t} + \sigma\int_0^t \mathrm{e}^{\rho(t-s)}\,\mathrm{d}\widetilde{B}(s)$$

(on aurait aussi pu d'abord intégrer l'équation pour $\overline{X}_1(t)$ et changer de variable ensuite).

4. *Déterminer le prix d'une option de fonction de paiement $F(\omega) = \mathrm{e}^{X_1(T)}$.*

Le prix de l'option est donné par

$$p(F) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\bigl[\xi(T)F\bigr] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\bigl[\mathrm{e}^{-\rho T}\,\mathrm{e}^{X_1(T)}\bigr]\;.$$

Nous pouvons écrire $X_1(T) = x_1\,\mathrm{e}^{\rho t} + \sigma Z$, où $Z = \int_0^T \mathrm{e}^{\rho(T-s)}\,\mathrm{d}\widetilde{B}(s)$ est, sous la probabilité $\mathbb{Q}$, une variable aléatoire normale centrée, de variance

$$v_T = \int_0^T \mathrm{e}^{2\rho(T-s)}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2\rho}\bigl(\mathrm{e}^{2\rho T} - 1\bigr)$$

en vertu de l'isométrie d'Itô. Cela permet de calculer (avec le changement de variable $z = \sqrt{v_T} z'$ et en complétant le carré)

$$\begin{aligned} p(F) &= \mathrm{e}^{-\rho T} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{x_1 \mathrm{e}^{\rho T} + \sigma z} \frac{\mathrm{e}^{-z^2/2v_T}}{\sqrt{2\pi v_T}} \, \mathrm{d}z \\ &= \exp\biggl\{ -\rho T + x_1 \mathrm{e}^{\rho T} + \frac{\sigma^2}{4\rho} \bigl(\mathrm{e}^{2\rho T} - 1 \bigr) \biggr\} \,. \end{aligned}$$

5. *Calculer le portefeuille de couverture de l'option ci-dessus.*

Soit $h(x) = \mathrm{e}^{-\rho T} \mathrm{e}^{x}$ la fonction définie par $\xi(T) F = h(X_1(T))$. On commence par calculer (de manière similaire à ci-dessus)

$$\begin{aligned} g(t,x) &= \mathbb{E}^{\,x}_{\mathbb{Q}} \bigl[h(X_1(T-t)) \bigr] \\ &= \mathrm{e}^{-\rho T} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{x \mathrm{e}^{\rho(T-t)} + \sigma z} \frac{\mathrm{e}^{-z^2/2v_{T-t}}}{\sqrt{2\pi v_{T-t}}} \, \mathrm{d}z \\ &= \exp\biggl\{ -\rho T + x \mathrm{e}^{\rho(T-t)} + \frac{\sigma^2}{4\rho} \bigl(\mathrm{e}^{2\rho(T-t)} - 1 \bigr) \biggr\} \,. \end{aligned}$$

On a vu que la fonction $\phi(t)$ satisfaisant

$$\xi(T) F - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \bigl[\xi(T) F \bigr] = \int_0^T \phi(t) \, \mathrm{d}\widetilde{B}(t)$$

est donnée par

$$\phi(t) = \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_1(t)) \sigma = \sigma \exp\biggl\{ -\rho t + X_1(t) \mathrm{e}^{\rho(T-t)} + \frac{\sigma^2}{4\rho} \bigl(\mathrm{e}^{2\rho(T-t)} - 1 \bigr) \biggr\} \,.$$

Comme $\theta_1(t) \, \mathrm{d}\overline{X}_1(t) = \phi(t) \, \mathrm{d}\widetilde{B}(t)$, il suit que la quantité d'actif risqué dans le portefeuille au temps t est donnée par

$$\theta_1(t) = \exp\biggl\{ X_1(t) \mathrm{e}^{\rho(T-t)} + \frac{\sigma^2}{4\rho} \bigl(\mathrm{e}^{2\rho(T-t)} - 1 \bigr) \biggr\} \,.$$

Remarque : Pour déterminer la quantité d'actif non risqué $\theta_0(t)$, on peut commencer par calculer la valeur du portefeuille en tout temps, en utilisant le fait que sa valeur normalisée est une $\mathbb{Q}$-martingale. Un calcul similaire à celui de l'Exercice 2, Série 1, donne

$$\overline{V}^\theta(t) = \mathbb{E} \bigl(\mathrm{e}^{-\rho T} \mathrm{e}^{X_1(T)} \bigm| \mathcal{F}_t \bigr) = \exp\biggl\{ -\rho T + X_1(t) \mathrm{e}^{\rho(T-t)} + \frac{\sigma^2}{4\rho} \bigl(\mathrm{e}^{2\rho(T-t)} - 1 \bigr) \biggr\} \,.$$

et donc

$$V^\theta(t) = \exp\biggl\{ -\rho(T-t) + X_1(t) \mathrm{e}^{\rho(T-t)} + \frac{\sigma^2}{4\rho} \bigl(\mathrm{e}^{2\rho(T-t)} - 1 \bigr) \biggr\} \,.$$

En résolvant la relation $V^\theta(t) = \theta_0(t) X_0(t) + \theta_1(t) X_1(t)$ par rapport à $\theta_0(t)$, on obtient

$$\theta_0(t) = \bigl[\mathrm{e}^{-\rho T} - \mathrm{e}^{-\rho t} X_1(t) \bigr] \theta_1(t) \,.$$

Le même résultat peut aussi être obtenu à partir de la condition d'autofinancement $\mathrm{d}V^\theta(t) = \theta_0(t) \, \mathrm{d}X_0(t) + \theta_1(t) \, \mathrm{d}X_1(t)$.

Exercice 2

On considère le marché financier à 2 titres suivant :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_0(t) &= \rho X_0(t)\,\mathrm{d}t & X_0(0) &= 1\;, \\ \mathrm{d}X_1(t) &= \gamma\,\mathrm{d}B(t) & X_1(0) &= x_1\;. \end{aligned}$$

1. *Trouver explicitement $X_0(t)$ et $X_1(t)$.*

$$X_0(t) = \mathrm{e}^{\rho t}\;, \qquad X_1(t) = x_1 + \gamma B(t)\;.$$

2. *Normaliser le marché et déterminer la mesure de risque neutre $\mathbb{Q}$.*

   En appliquant la formule d'Itô à $\overline{X}_1(t) = \mathrm{e}^{-\rho t} X_1(t)$, on obtient

$$\mathrm{d}\overline{X}_1(t) = -\rho\overline{X}_1(t)\,\mathrm{d}t + \gamma\,\mathrm{e}^{-\rho t}\,\mathrm{d}B(t)\;.$$

   La mesure de risque neutre est définie comme au premier exercice avec

$$u(t) = -\frac{\rho}{\gamma}X_1(t)\;.$$

3. *Ecrire et résoudre les équations du marché non normalisé par rapport au $\mathbb{Q}$-mouvement Brownien $\widetilde{B}(t)$.*

   La transformation de Girsanov donne l'équation

$$\mathrm{d}\overline{X}_1(t) = \gamma\,\mathrm{e}^{-\rho t}\,\mathrm{d}\widetilde{B}(t)\;.$$

   Comme au premier exercice, on trouve

$$X_1(t) = x_1\,\mathrm{e}^{\rho t} + \gamma\int_0^t \mathrm{e}^{\rho(t-s)}\,\mathrm{d}\widetilde{B}(s)\;.$$

4. *Déterminer le prix d'une option de fonction de paiement $F(\omega) = B(T)$.*

   Le prix de l'option est donné par

$$p(F) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big[\xi(T)F\big] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big[\mathrm{e}^{-\rho T} B(T)\big]\;.$$

   L'expression obtenue pour $X_1(t)$ au premier point nous permet d'écrire $B(T) = [X_1(T) - x_1]/\gamma$. Nous pouvons écrire $X_1(T) = x_1\,\mathrm{e}^{\rho t} + \gamma Z$, où $Z = \int_0^T \mathrm{e}^{\rho(T-s)}\,\mathrm{d}\widetilde{B}(s)$ est, sous la probabilité $\mathbb{Q}$, une variable aléatoire normale centrée, de variance

$$v_T = \int_0^T \mathrm{e}^{2\rho(T-s)}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2\rho}\big(\mathrm{e}^{2\rho T} - 1\big)$$

   en vertu de l'isométrie d'Itô. Cela permet de calculer

$$\begin{aligned} p(F) &= \mathrm{e}^{-\rho T}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_1 e^{\rho T} + \gamma z - x_1}{\gamma}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-z^2/2v_T}}{\sqrt{2\pi v_T}}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{x_1}{\gamma}(1 - \mathrm{e}^{-\rho T})\;. \end{aligned}$$

5. *Calculer le portefeuille de couverture de l'option ci-dessus.*

   Soit $h(x) = \mathrm{e}^{-\rho T}[x - x_1]/\gamma$ la fonction définie par $\xi(T)F = h(X_1(T))$. On commence par calculer (de manière similaire à ci-dessus)

$$\begin{aligned} g(t,x) &= \mathbb{E}\,{}^{x}_{\mathbb{Q}}\bigl[h(X_1(T-t))\bigr] \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\rho T}}{\gamma}\int_{-\infty}^{\infty}[x\,\mathrm{e}^{\rho(T-t)} + \gamma z - x_1]\frac{\mathrm{e}^{-z^2/2v_{T-t}}}{\sqrt{2\pi v_{T-t}}}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{\gamma}\bigl[\mathrm{e}^{-\rho t}\,x - x_1\bigr]\ . \end{aligned}$$

   On a vu que la fonction $\phi(t)$ satisfaisant

$$\xi(T)F - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\bigl[\xi(T)F\bigr] = \int_0^T \phi(t)\,\mathrm{d}\widetilde{B}(t)$$

   est donnée par

$$\phi(t) = \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_1(t))\gamma = \mathrm{e}^{-\rho t}\ .$$

   Comme $\theta_1(t)\,\mathrm{d}\overline{X}_1(t) = \phi(t)\,\mathrm{d}\widetilde{B}(t)$, il suit que la quantité d'actif risqué dans le portefeuille est constante :

$$\theta_1(t) = \frac{1}{\gamma}\ .$$

   Remarque : Pour déterminer la quantité d'actif non risqué $\theta_0(t)$, on peut commencer par calculer la valeur du portefeuille en tout temps, en utilisant le fait que sa valeur normalisée est une $\mathbb{Q}$-martingale. On obtient

$$\begin{aligned} \overline{V}^{\theta}(t) &= \mathbb{E}\bigl(\mathrm{e}^{-\rho T}\,B(T)\bigm|\mathcal{F}_t\bigr) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\rho T}}{\gamma}\mathbb{E}\bigl(X_1(T) - x_1\bigm|\mathcal{F}_t\bigr) \\ &= \frac{1-\mathrm{e}^{-\rho T}}{\gamma}x_1 + \int_0^t \mathrm{e}^{-\rho s}\,\mathrm{d}\widetilde{B}(s)\ . \end{aligned}$$

   En effet,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\bigl(X_1(T)\bigm|\mathcal{F}_t\bigr) &= \mathrm{e}^{\rho T}\,\mathbb{E}\Bigl(x_1 + \gamma\int_0^t \mathrm{e}^{-\rho s}\,\mathrm{d}\widetilde{B}(s) + \gamma\int_t^T \mathrm{e}^{-\rho s}\,\mathrm{d}\widetilde{B}(s)\Bigm|\mathcal{F}_t\Bigr) \\ &= \mathrm{e}^{\rho T}\Bigl(x_1 + \gamma\int_0^t \mathrm{e}^{-\rho s}\,\mathrm{d}\widetilde{B}(s)\Bigr)\ , \end{aligned}$$

   la première intégrale stochastique étant $\mathcal{F}_t$-mesurable, alors que la seconde est indépendante de $\mathcal{F}_t$ et d'espérance nulle. Il suit

$$V^{\theta}(t) = \mathrm{e}^{\rho t}\,\frac{1-\mathrm{e}^{-\rho T}}{\gamma}x_1 + \int_0^t \mathrm{e}^{\rho(t-s)}\,\mathrm{d}\widetilde{B}(s) = \frac{1}{\gamma}\Bigl[X_1(t) - x_1\,\mathrm{e}^{-\rho(T-t)}\Bigr]\ ,$$

   ce qui implique

$$\theta_0(t) = -\frac{x_1}{\gamma}\,\mathrm{e}^{-\rho T}\ .$$

   La valeur du portefeuille peut également être exprimée en fonction du mouvement Brownien initial, via les expressions de $X_0(t)$ et $X_1(t)$ obtenues au point 1. Le résultat

$$V^{\theta}(t) = \theta_0(t)X_0(t) + \theta_1(t)X_1(t) = \frac{x_1}{\gamma}\bigl[1 - \mathrm{e}^{-\rho(T-t)}\bigr] + B(t)$$

   montre qu'on a bien $V^{\theta}(0) = p(F)$ et $V^{\theta}(T) = F$.