# TD Master 2 – Mathématiques financières

## Corrigé Série 4 – Marchés viables et marchés complets

*On considère les modèles de marchés normalisés* ($\mathrm{d}X_0(t) = 0$) *suivants :*

a.
$$\begin{cases} \mathrm{d}X_1(t) = 3\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_1(t) + \mathrm{d}B_2(t)\ , \\ \mathrm{d}X_2(t) = -\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_1(t) - \mathrm{d}B_2(t)\ . \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} \mathrm{d}X_1(t) = \mathrm{d}t + \mathrm{d}B_1(t) + \mathrm{d}B_2(t) - \mathrm{d}B_3(t)\ , \\ \mathrm{d}X_2(t) = 5\,\mathrm{d}t - \mathrm{d}B_1(t) + \mathrm{d}B_2(t) + \mathrm{d}B_3(t)\ . \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} \mathrm{d}X_1(t) = \mathrm{d}t + \mathrm{d}B_1(t) + \mathrm{d}B_2(t) - \mathrm{d}B_3(t)\ , \\ \mathrm{d}X_2(t) = 5\,\mathrm{d}t - \mathrm{d}B_1(t) - \mathrm{d}B_2(t) + \mathrm{d}B_3(t)\ . \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} \mathrm{d}X_1(t) = \mathrm{d}t + \mathrm{d}B_1(t) + \mathrm{d}B_2(t) - \mathrm{d}B_3(t)\ , \\ \mathrm{d}X_2(t) = -3\,\mathrm{d}t - 3\,\mathrm{d}B_1(t) - 3\,\mathrm{d}B_2(t) + 3\,\mathrm{d}B_3(t)\ . \end{cases}$$

e.
$$\begin{cases} \mathrm{d}X_1(t) = \mathrm{d}t + \mathrm{d}B_1(t) + \mathrm{d}B_2(t)\ , \\ \mathrm{d}X_2(t) = 2\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_1(t) - \mathrm{d}B_2(t)\ , \\ \mathrm{d}X_3(t) = 3\,\mathrm{d}t - \mathrm{d}B_1(t) + \mathrm{d}B_2(t)\ . \end{cases}$$

f.
$$\begin{cases} \mathrm{d}X_1(t) = \mathrm{d}t + \mathrm{d}B_1(t) + \mathrm{d}B_2(t)\ , \\ \mathrm{d}X_2(t) = 2\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_1(t) - \mathrm{d}B_2(t)\ , \\ \mathrm{d}X_3(t) = -2\,\mathrm{d}t - \mathrm{d}B_1(t) + \mathrm{d}B_2(t)\ . \end{cases}$$

**Exercice 1**

1. *Déterminer lesquels parmi les marchés ci-dessus sont viables.*
2. *Donner, pour chaque marché non viable, une opportunité d'arbitrage.*

a. On a $n = 2$, $m = 2$ et

$$\mu = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}\ , \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\ .$$

L'équation $\sigma u = \mu$ admet la solution $u_1 = 1, u_2 = 2$, le marché est donc viable. Notons que comme $T$ est fini, pour un $u$ constant, la condition

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \|u\|^2\,\mathrm{d}t\right)\right] < \infty$$

est toujours satisfaite.

b. On a $n = 2$, $m = 3$ et

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}\ , \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

Tout vecteur $u$ tel que $u_2 = 3$ et $u_1 - u_3 = -2$ est solution de $\sigma u = \mu$. Le marché est donc viable.

c. On a $n = 2$, $m = 3$ et

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} , \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

L'équation $\sigma u = \mu$ n'admet pas de solution ($\mu$ n'est pas dans l'image de $\sigma$). Le marché n'est donc pas viable.
Un exemple d'opportunité d'arbitrage est le portefeuille $\theta(t) = (\theta_0(t), 1, 1)$, la fonction $\theta_0(t)$ étant choisie de manière à rendre le portefeuille autofinancé, dont la valeur vaut

$$V^\theta(t) = \int_0^t \theta(s) \cdot \mathrm{d}X(s) = \int_0^t 6 \,\mathrm{d}s = 6t .$$

d. On a $n = 2$, $m = 3$ et

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} , \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} .$$

Tout vecteur $u$ tel que $u_1 + u_2 - u_3 = 1$ est solution de l'équation $\sigma u = \mu$ (bien que la matrice $\sigma$ soit de rang 1, $\mu$ est dans l'image de $\sigma$). On notera que les portefeuilles de la forme $\theta(t) = (\theta_0(t), 3, 1)$ ne sont pas des opportunités d'arbitrage car ils ont une valeur constante.

e. On a $n = 3$, $m = 2$ et

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} , \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

L'équation $\sigma u = \mu$ n'admet pas de solution ($\mu$ n'est pas dans l'image de $\sigma$). Le marché est donc non viable.
Un exemple d'opportunité d'arbitrage est le portefeuille $\theta(t) = (\theta_0(t), 0, 1, 1)$, dont la valeur vaut

$$V^\theta(t) = \int_0^t \theta(s) \cdot \mathrm{d}X(s) = \int_0^t 5 \,\mathrm{d}s = 5t .$$

f. On a $n = 3$, $m = 2$ et

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} , \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Le vecteur $u = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})^T$ est solution de l'équation $\sigma u = \mu$ (contrairement au cas précédent, $\mu$ est dans l'image de $\sigma$). Le marché est donc viable.

### Exercice 2

1. *Déterminer lesquels parmi les marchés ci-dessus sont complets.*
2. *Pour chaque marché incomplet, donner un exemple de fonction de paiement non atteignable.*

On n'examinera que les marchés viables.
**Remarque :** Un marché complet est viable si et seulement s'il existe $u$ tel que $\sigma u = \mu$, donc tel que $u = \Lambda\sigma u = \Lambda\mu$, ce qui est équivalent à la condition $(\sigma\Lambda)\mu = \mu$. Cela revient à dire exiger que $\mu$ appartienne au sous-espace propre de la matrice $\sigma\Lambda$ associé à la valeur propre 1 (on notera que $\sigma\Lambda = \Lambda\sigma$ si et seulement si $n = m$).

a. La matrice $\sigma$ est carrée et non singulière ($\det \sigma \neq 0$), elle admet donc un inverse à gauche. Le marché est complet.

b. Il n'existe pas de matrice $\Lambda$ de dimension $3 \times 2$ telle que $\Lambda\sigma = \mathbb{1}$ (on trouve par exemple les conditions contradictoires $\lambda_{11} - \lambda_{12} = 1$ et $-\lambda_{11} + \lambda_{12} = 0$). Le marché est donc incomplet.
Un exemple de fonction de paiement non atteignable est $F = \widetilde{B}_1(T)$. En effet, le théorème de représentation des martingales montre l'existence d'un unique triplet $(\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t))$ de fonctions mesurables tel que

$$\widetilde{B}_1(T) = \int_0^T \Big[\phi_1(t)\,\mathrm{d}\widetilde{B}_1(t) + \phi_2(t)\,\mathrm{d}\widetilde{B}_2(t) + \phi_3(t)\,\mathrm{d}\widetilde{B}_3(t)\Big]$$

pour presque toute réalisation des $\widetilde{B}_i(t)$. En fait ce triplet est donné simplement par $(\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t)) = (1, 0, 0)$. Supposons alors par l'absurde que $F = \widetilde{B}_1(T)$ est atteignable. Il existe donc un portefeuille de couverture $\theta(t) = (\theta_1(t), \theta_2(t))$ tel que

$$\widetilde{B}_1(T) = z + \int_0^T \theta(t) \cdot \mathrm{d}X(t)$$

presque sûrement. La transformation de Girsanov donne

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_1(t) = \mathrm{d}\widetilde{B}_1(t) + \mathrm{d}\widetilde{B}_2(t) - \mathrm{d}\widetilde{B}_3(t)\ , \\ \mathrm{d}X_2(t) = -\,\mathrm{d}\widetilde{B}_1(t) + \mathrm{d}\widetilde{B}_2(t) + \mathrm{d}\widetilde{B}_3(t)\ . \end{cases}$$

L'intégrale de $\theta(t) \cdot \mathrm{d}X(t)$ est une $\mathbb{Q}$-martingale, donc son espérance sous $\mathbb{Q}$ est nulle. Il suit que $z = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{B}_1(T)) = 0$ et

$$\widetilde{B}_1(T) = \int_0^T \Big[(\theta_1(t) - \theta_2(t))\,\mathrm{d}\widetilde{B}_1(t) + (\theta_1(t) + \theta_2(t))\,\mathrm{d}\widetilde{B}_2(t) + (-\theta_1(t) + \theta_2(t))\,\mathrm{d}\widetilde{B}_3(t)\Big]\ .$$

En comparant avec l'expression des $\phi_i(t)$, il vient

$$\begin{cases} \theta_1(t) - \theta_2(t) = 1\ , \\ \theta_1(t) + \theta_2(t) = 0\ , \\ -\theta_1(t) + \theta_2(t) = 0\ , \end{cases}$$

ce qui conduit à une contradiction (on remarquera que c'est la même qui apparaît ci-dessus dans le calcul de $\Lambda$).

d. Il n'existe pas de matrice $\Lambda$ de dimension $3 \times 2$ telle que $\Lambda\sigma = \mathbb{1}$. Le marché est donc incomplet.
Un exemple de fonction de paiement non atteignable est $F = \widetilde{B}_1(T)$. Le raisonnement est similaire à celui du cas b.

f. La matrice

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

est une solution possible de l'équation $\Lambda\sigma = \mathbb{1}$ (cette solution n'est pas unique). Le marché est donc complet.