# TD Master 2 – Mathématiques financières

## Corrigé Série 3 – Diffusions

### Exercice 1

*On considère la diffusion définie par l'équation*

$$\mathrm{d}X_t = -X_t \,\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t$$

*(processus d'Ornstein–Uhlenbeck).*

1. *Donner le générateur $L$ associé et son adjoint $L^*$.*

$$L = -x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} , \qquad L^*\rho = \frac{\partial}{\partial x}(x\rho) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} .$$

2. *Soit $\rho(x) = \pi^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-x^2}$. Calculer $L^*\rho(x)$. Que peut-on en conclure?*

   On trouve $L^*\rho = 0$. Par conséquent, $\rho(x)$ est une solution stationnaire de l'équation de Kolmogorov progressive (ou de Fokker–Planck) $\partial_t u = L^* u$, ce qui signifie que c'est une mesure invariante du système : Si $X_0$ suit la loi $\rho$, alors $X_t$ suit la même loi pour tout $t > 0$.
   Remarquons que $\rho$ est la densité d'une variable aléatoire normale, centrée, de variance 1/2. Nous avons déjà obtenu dans la série 1, exercice 1, que $\rho$ est la loi asymptotique de la solution de la même EDS avec $X_0 = 0$. En fait on peut montrer que pour toute distribution initiale, la loi de $X_t$ tend vers la distribution stationnaire $\rho$.

### Exercice 2

*On considère la diffusion définie par l'équation*

$$\mathrm{d}X_t = X_t \,\mathrm{d}B_t .$$

1. *Donner le générateur $L$ associé.*

$$L = \frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} .$$

2. *Trouver la solution générale de l'équation $Lu = 0$.*

   On a $Lu = 0$ si $u''(x) = 0$, dont la solution générale est $u(x) = c_1 x + c_2$.

3. *En déduire $\mathbb{P}^x\{\tau_a < \tau_b\}$, où $\tau_a$ dénote le temps de premier passage de $X_t$ en $a$. Indication: Il s'agit de calculer $\mathbb{E}^x(\psi(X_\tau))$, où $\tau$ est le temps de première sortie de $[a,b]$, et $\psi(a) = 1$, $\psi(b) = 0$.*

   On sait que $u(x) = \mathbb{P}^x\{\tau_a < \tau_b\}$ est solution du problème

$$\begin{cases} Lu(x) = 0 & \text{pour } x \in [a,b] , \\ u(a) = 1 , \\ u(b) = 0 . \end{cases}$$

   En substituant la solution générale dans les conditions aux bords, on peut déterminer les constantes d'intégration $c_1$ et $c_2$, d'où la solution

$$\mathbb{P}^x\{\tau_a < \tau_b\} = \frac{b-x}{b-a} .$$

**Exercice 3**

*On considère plus généralement la diffusion définie par l'équation*

$$\mathrm{d}X_t = rX_t\,\mathrm{d}t + X_t\,\mathrm{d}B_t\ , \qquad r \in \mathbb{R}$$

*(mouvement Brownien géométrique).*

1. *Calculer son générateur $L$.*

$$L = rx\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ .$$

2. *Montrer que si $r \neq 1/2$, la solution générale de l'équation $Lu = 0$ s'écrit*

$$u(x) = c_1 x^\gamma + c_2\ ,$$

*où $\gamma$ est une fonction de $r$ qu'on déterminera.*

En substituant, on obtient $Lu(x) = c_1\gamma(r + \frac{1}{2}(\gamma - 1))x^\gamma$, donc $Lu = 0$ à condition de prendre $\gamma = 1 - 2r$.

*Remarque :* La solution générale s'obtient en observant que $v(x) = u'(x)$ satisfait l'équation

$$\frac{v'(x)}{v(x)} = -\frac{2r}{x}\ ,$$

que l'on peut intégrer.

3. *On suppose $r < 1/2$. Calculer $\mathbb{P}^{\,x}\{\tau_b < \tau_a\}$ pour $0 < a < x < b$, puis $\mathbb{P}^{\,x}\{\tau_b < \tau_0\}$ en faisant tendre $a$ vers $0$. On remarquera que si $X_{t_0} = 0$ alors $X_t = 0$ pour tout $t \geqslant t_0$. Par conséquent si $\tau_0 < \tau_b$, alors $X_t$ n'atteindra jamais $b$. Quelle est la probabilité que cela arrive?*

Dans ce cas, on a $\gamma > 0$. En procédant comme à l'exercice précédent, on obtient

$$\mathbb{P}^{\,x}\{\tau_b < \tau_a\} = \frac{x^\gamma - a^\gamma}{b^\gamma - a^\gamma}\ .$$

Comme $a^\gamma \to 0$ lorsque $a \to 0$, il suit que

$$\mathbb{P}^{\,x}\{\tau_b < \tau_0\} = \left(\frac{x}{b}\right)^\gamma\ .$$

La probabilité que $X_t$ n'atteigne jamais $b$ est donc $1 - (X_0/b)^\gamma$.

4. *On suppose maintenant $r > 1/2$.*

   (a) *Calculer $\mathbb{P}^{\,x}\{\tau_a < \tau_b\}$ pour $0 < a < x < b$, et montrer que cette probabilité tend vers $0$ pour tout $x \in ]a, b[$ lorsque $a \to 0_+$. En conclure que presque sûrement, $X_t$ n'atteindra jamais $0$ dans cette situation.*

   Dans ce cas, on a $\gamma < 0$. En procédant comme à l'exercice précédent, on obtient

$$\mathbb{P}^{\,x}\{\tau_a < \tau_b\} = \frac{x^\gamma - b^\gamma}{a^\gamma - b^\gamma}\ .$$

   Comme $a^\gamma \to +\infty$ lorsque $a \to 0$, toutes les autres grandeurs étant constantes, on obtient en faisant tendre $a$ vers $0$

$$\mathbb{P}^{\,x}\{\tau_0 < \tau_b\} = 0 \qquad \forall x \in ]a, b[\ .$$

(b) *Trouver* $\alpha$ *et* $\beta$ *tels que* $u(x) = \alpha \log x + \beta$ *satisfasse le problème*

$$\begin{cases} (Lu)(x) = -1 & \text{si } 0 < x < b \ , \\ u(x) = 0 & \text{si } x = b \ . \end{cases}$$

L'équation $Lu = -1$ donne $\alpha = -1/(r - 1/2)$ et la condition au bord donne $\beta = \log b/(r - 1/2)$.

(c) *En déduire* $\mathbb{E}^x(\tau_b)$.

C'est précisément la solution du problème ci-dessus, donc

$$\mathbb{E}^x(\tau_b) = \frac{1}{r - 1/2} \log\left(\frac{b}{x}\right) \ .$$

Cela montre que les solutions tendent à croître exponentiellement. En effet, on a $\mathbb{E}^x(\tau_b) = T$ pour

$$b = x\,\mathrm{e}^{(r-1/2)T} \ .$$