TD Master 2 – Mathématiques financières

Corrigé Série 2 – Equations différentielles stochastiques

Exercice 1

On considère l'équation

$$\mathrm{d}X_t = a(t)X_t\,\mathrm{d}t + b(t)\,\mathrm{d}t + c(t)\,\mathrm{d}B_t\;,$$

où $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ sont des processus adaptés.

Résoudre cette équation par la méthode de la variation de la constante, c'est-à-dire

1. *Soit $\alpha(t) = \int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s$. Vérifier que $X_0\,\mathrm{e}^{\alpha(t)}$ est la solution de l'équation homogène, c-à-d avec $b = c = 0$.*

2. *Poser $Y_t = \mathrm{e}^{-\alpha(t)}\,X_t$ et calculer $\mathrm{d}Y_t$ à l'aide de la formule d'Itô.*

$$\begin{aligned}\mathrm{d}Y_t &= -a(t)\,\mathrm{e}^{-\alpha(t)}\,X_t\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-\alpha(t)}\,\mathrm{d}X_t \\ &= \mathrm{e}^{-\alpha(t)}\,b(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-\alpha(t)}\,c(t)\,\mathrm{d}B_t\;.\end{aligned}$$

3. *En déduire Y_t puis X_t sous forme intégrale.*

   En intégrant, il vient

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha(s)}\,b(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha(s)}\,c(s)\,\mathrm{d}B_s\;,$$

   puis, comme $X_0 = Y_0$,

$$X_t = X_0\,\mathrm{e}^{\alpha(t)} + \int_0^t \mathrm{e}^{\alpha(t)-\alpha(s)}\,b(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \mathrm{e}^{\alpha(t)-\alpha(s)}\,c(s)\,\mathrm{d}B_s\;.$$

4. *Résoudre l'EDS*

$$\mathrm{d}X_t = -\frac{1}{1+t}X_t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}B_t\;, \qquad X_0 = 0\;.$$

   Dans ce cas, $\alpha(t) = -\log(1+t)$, donc $\mathrm{e}^{\alpha(t)} = (1+t)^{-1}$ et

$$X_t = \int_0^t \frac{1+s}{1+t}\frac{1}{1+s}\,\mathrm{d}B_s = \frac{B_t}{1+t}\;.$$

Exercice 2

Soit le processus

$$X_t = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t g(s)\,\mathrm{d}B_s\;,$$

où $f(t)$ et $g(t)$ sont des processus adaptés.

1. *Soit $Y_t = \mathrm{e}^{X_t}$. Calculer $\mathrm{d}Y_t$ à l'aide de la formule d'Itô.*

$$\begin{aligned}\mathrm{d}Y_t &= \mathrm{e}^{X_t}\,\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{X_t}\,\mathrm{d}X_t^2 \\ &= \left[f(t) + \frac{1}{2}g(t)^2\right]Y_t\,\mathrm{d}t + g(t)Y_t\,\mathrm{d}B_t\;.\end{aligned}$$

2. *En déduire la solution de l'équation*

$$\mathrm{d}Y_t = a(t)Y_t \,\mathrm{d}t + b(t)Y_t \,\mathrm{d}B_t \;.$$

En comparant avec l'expression trouvée à la question précédente, on identifie $g(t) = b(t)$ et $f(t) = a(t) - \frac{1}{2}g(t)^2 = a(t) - \frac{1}{2}b(t)^2$. Par conséquent,

$$X_t = X_0 \exp\biggl\{\int_0^t \Bigl[a(s) - \frac{1}{2}b(s)^2\Bigr] \,\mathrm{d}s + \int_0^t b(s) \,\mathrm{d}B_s\biggr\} \;.$$

Exercice 3

Résoudre l'EDS

$$\mathrm{d}X_t = -\frac{1}{2}X_t \,\mathrm{d}t + \sqrt{1 - X_t^2} \,\mathrm{d}B_t \;, \qquad X_0 = 0$$

à l'aide du changement de variable $Y = \mathrm{Arcsin}(X)$.

La formule d'Itô donne

$$\mathrm{d}Y_t = \frac{\mathrm{d}X_t}{\sqrt{1 - X_t^2}} + \frac{1}{2}\frac{X_t}{(1 - X_t^2)^{3/2}} \,\mathrm{d}X_t^2 = \mathrm{d}B_t \;.$$

Par conséquent, $X_t = \sin(B_t)$ pour tous les $t \leqslant \inf\{s > 0 \colon |B_s| = \frac{\pi}{2}\}$. Pour les temps supérieurs, le théorème d'existence et unicité des solutions ne s'applique plus, car le coefficient de diffusion n'est pas Lipschitz en $x = \pm 1$.

Exercice 4

1. *En utilisant l'exercice 1, résoudre l'EDS:*

$$\mathrm{d}X_t = \frac{b - X_t}{1 - t} \,\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t \;, \qquad 0 \leqslant t < 1 \;, \quad X_0 = a \;.$$

Avec $\alpha(t) = \log(1 - t)$, il vient

$$X_t = a(1 - t) + bt + (1 - t)\int_0^t \frac{1}{1 - s} \,\mathrm{d}B_s \;.$$

2. *Déterminer la variance de X_t. Calculer $\lim_{t\to 1_-} X_t$ dans L^2.*

Par l'isométrie d'Itô,

$$\mathrm{Var}(X_t) = (1 - t)^2 \int_0^t \frac{1}{(1 - s)^2} \,\mathrm{d}s = (1 - t)^2 \biggl[\frac{1}{1 - t} - 1\biggr] = t(1 - t) \;.$$

Par conséquent, $\mathrm{Var}(X_t - b) \to 0$ lorsque $t \to 1_-$, donc $X_t \to b$ dans L^2 lorsque $t \to 1_-$.

3. *Le processus X_t est appelé un pont Brownien — expliquer pourquoi.*

On a $X_0 = a$ et $X_1 = b$ (au sens de la convergence L^2). De plus, les incréments de X_t sont indépendants et gaussiens. La seule différence par rapport au mouvement Brownien est que la variance de $X_t - X_s$ est donnée par $t(1 - t) - s(1 - s)$ au lieu de $t - s$.