Introduction aux equations différentielles stochastiques

Nils Berglund

Janvier 2005

1 Le mouvement Brownien

Les équations différentielles stochastiques servent de modèle mathématique à des systèmes faisant intervenir deux types de forces, l'une déterministe et l'autre aléatoire. Par exemple, le mouvement d'une particule mésoscopique dans un fluide ou un gaz peut être décrit par une équation de la forme

$$m\ddot{x} = F_{\text{ext}} + F_{\text{stoch}}. \tag{1.1}$$

Ici F_{ext} décrit une force extérieure déterministe, par exemple la gravité ou une force électromagnétique. F_{stoch} décrit l'effet des collisions erratiques des molécules du fluide avec la particule mésoscopique. Le mouvement des molécules n'étant pas connu en détail, nous voulons modéliser le second terme par une force aléatoire, ou un *bruit*.

La manière de modéliser le bruit dépend évidemment de la nature du fluide et des échelles de temps et de longueur en jeu. La situation la plus simple apparaît lorsque le temps de décorrélation des molécules est négligeable par rapport à l'échelle de temps caractéristique de la particule, on parle alors de *bruit blanc*. Celui-ci est modélisé mathématiquement par le *mouvement Brownien*, ou *processus de Wiener*, qui peut lui-même être vu comme la limite du continu d'une marche aléatoire.

1.1 La marche aléatoire unidimensionnelle symétrique

Soient $\{X_i\}_{i\geqslant 1}$ des variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées (i.i.d.) telles que

$$\mathbb{P}\{X_i = 1\} = \mathbb{P}\{X_i = -1\} = \frac{1}{2}. \tag{1.2}$$

La marche aléatoire unidimensionnelle symétrique est le processus stochastique à temps discret $\{S_n\}_{n\geqslant 0}$ donné par

$$S_0 = 0, \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad n \geqslant 1. \tag{1.3}$$

Rappelons ici quelques notions de théorie des probabilités. Notre processus stochastique vit dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. L'univers Ω peut être identifié à $\{-1,1\}^{\mathbb{N}}$, avec, pour une réalisation $\omega \in \Omega$,

$$S_n(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i, \qquad n \geqslant 0. \tag{1.4}$$

La σ-algèbre $\mathcal{F}$ décrit l'ensemble des événements, et contient en particulier les événements

$$A_{x_1,x_2,\dots,x_n} = \{\omega \in \Omega \colon \omega_1 = x_1, \dots, \omega_n = x_n\}, \qquad (x_1, \dots, x_n) \in \{-1,+1\}^n, \tag{1.5}$$

qui ont probabilité 2^{-n}. La *filtration* canonique de $\mathcal{F}$ est la suite croissante de σ-algèbres

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset \mathcal{F} = \bigcup_{n\geqslant 0} \mathcal{F}_n, \tag{1.6}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_0 &= \{\Omega, \emptyset\} \\
\mathcal{F}_1 &= \{\Omega, \emptyset, A_1, A_{-1}\} \\
\mathcal{F}_2 &= \overline{\{\Omega, \emptyset, A_1, A_{-1}, A_{1,1}, A_{1,-1}, A_{-1,1}, A_{-1,-1}\}} \\
&\dots \\
\mathcal{F}_n &= \overline{\{\Omega, \emptyset\} \cup \bigcup_{m=1}^{n} \{A_x \colon x \in \{-1,+1\}^m\}}, \\
&\dots
\end{aligned} \tag{1.7}$$

où $\overline{\mathcal{A}}$ est la plus petite tribu contenant l'ensemble $\mathcal{A}$. C'est-à-dire que $\mathcal{F}_n$ contient tous les événements qui ne dépendent que de l'histoire du processus jusqu'au temps n.

Notons quelques propriétés élémentaires de la marche aléatoire. Tout d'abord, les X_i étant i.i.d., nous avons

$$S_n - S_m \stackrel{\mathcal{D}}{=} S_{n-m}, \qquad \forall n > m \geqslant 0 \tag{1.8}$$

où le symbole $\stackrel{\mathcal{D}}{=}$ désigne l'égalité en distribution.

Ensuite, comme l'espérance et la variance des X_i valent respectivement $\mathbb{E}\{X_i\} = 0$ et $\operatorname{Var}\{X_i\} = \mathbb{E}\{X_i^2\} - \mathbb{E}\{X_i\}^2 = 1$, nous avons

$$\mathbb{E}\{S_n\} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\{X_i\} = 0 \tag{1.9}$$

$$\operatorname{Var}\{S_n\} = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}\{X_i\} = n, \tag{1.10}$$

la deuxième relation étant une conséquence de l'indépendance des X_i. Enfin, il est facile d'établir que la loi de S_n est binômiale:

$$\mathbb{P}\{S_n = k\} = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n} \dfrac{n!}{\big(\frac{n+k}{2}\big)!\big(\frac{n-k}{2}\big)!} & \text{si } k \in \{-n, -n+2, \dots, n\}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.11}$$

Précisons toutefois que loi (1.11) ne contient pas à elle seule toute l'information sur le processus stochastique. En effet, si pour tout n fixé l'application

$$\omega \mapsto S_n(\omega) \tag{1.12}$$

est une variable aléatoire entièrement décrite par la loi (1.11), on peut également s'intéresser aux propriétés des *trajectoires* (*sample paths*)

$$n \mapsto S_n(\omega). \tag{1.13}$$

Un exemple d'événement dépendant de toute la trajectoire est

$$\Bigl\{\sup_{0\leqslant i\leqslant n} S_i \geqslant L\Bigr\}, \tag{1.14}$$

c'est-à-dire que la marche aléatoire a atteint le niveau L au moins une fois pendant les n premiers pas. L'analogue en temps continu de cet événement jouera un rôle important dans la suite.

1.2 Construction du processus de Wiener

Considérons la suite de processus

$$B_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{\lfloor nt\rfloor} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt\rfloor} X_i, \qquad t \geqslant 0. \tag{1.15}$$

Définissons d'abord formellement le processus B_t en prenant la limite au sens des distributions finies de $B_t^{(n)}$ lorsque $n \to \infty$. Autrement dit, B_t est défini par le fait que pour toute partition $0 \leqslant t_1 < t_2 < \dots < t_k$ et tout $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\bigl\{B_{t_i}^{(n)} \leqslant x_i, i = 1,\dots,k\bigr\} = \mathbb{P}\bigl\{B_{t_i} \leqslant x_i, i = 1,\dots,k\bigr\}. \tag{1.16}$$

Notons tout d'abord que

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}\{B_t^{(n)}\} = \lim_{n\to\infty} \Bigl(\frac{1}{\sqrt{n}}\Bigr)^2 \lfloor nt\rfloor = t. \tag{1.17}$$

De plus, nous pouvons écrire

$$B_t^{(n)} = \frac{S_{\lfloor nt\rfloor}}{\sqrt{\lfloor nt\rfloor}} \sqrt{\frac{\lfloor nt\rfloor}{n}}. \tag{1.18}$$

Le théorème de la limite centrale (ou un calcul direct à partir de (1.11)) montre que la loi de $S_{\lfloor nt\rfloor}/\sqrt{\lfloor nt\rfloor}$ converge, lorsque $n \to \infty$, vers la loi normale standard $\mathcal{N}(0,1)$ (i.e. de moyenne nulle et variance 1). Il suit que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\bigl\{B_t^{(n)} \leqslant x\bigr\} &= \mathbb{P}\bigl\{\sqrt{t}\mathcal{N}(0,1) \leqslant x\bigr\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x/\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-z^2/2t}\,\mathrm{d}z \\
&= \mathbb{P}\bigl\{\mathcal{N}(0,t) \leqslant x\bigr\}.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Pour tout t fixé, la loi de $B_t^{(n)}$ tend donc vers la loi normale $\mathcal{N}(0,t)$. De plus, si $t > s > 0$, $B_t^{(n)} - B_s^{(n)}$ est indépendant de $B_u^{(n)}$ pour tous les $u \leqslant s$ et nous avons par (1.8)

$$B_t^{(n)} - B_s^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}}\bigl(S_{\lfloor nt\rfloor} - S_{\lfloor ns\rfloor}\bigr) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} S_{\lfloor nt\rfloor - \lfloor ns\rfloor}, \tag{1.20}$$

dont la loi tend vers $\mathcal{N}(0, t-s)$. Toutes les distributions finies de B_t sont ainsi définies à partir de

$$\mathbb{P}\bigl\{B_{t_1} \leqslant x_1, B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \leqslant x_i, i = 2,\dots,k\bigr\} = \mathbb{P}\bigl\{B_{t_1} \leqslant x_1\bigr\} \prod_{i=2}^{k} \mathbb{P}\bigl\{B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \leqslant x_i\bigr\}. \tag{1.21}$$

Remarque 1.1. Les propriétés (1.17), (1.19) et (1.20) restent vraies pour des X_i i.i.d. quelconques, pourvu qu'ils aient espérance 0 et variance 1.

Définition 1.2. *Le* mouvement Brownien standard *ou* processus de Wiener standard *est le processus stochastique* $\{B_t\}_{t\geqslant 0}$ *satisfaisant:*

1. $B_0 = 0$;
2. *Incréments indépendants: pour tout* $t > s \geqslant 0$, $B_t - B_s$ *est indépendant de* $\{B_u\}_{u\leqslant s}$;
3. *La loi de* $B_t - B_s$ *est la loi normale* $\mathcal{N}(0, t-s)$.

Certains auteurs ajoutent la condition que les trajectoires $t \mapsto B_t$ soient continues, mais on peut en fait montrer que tout processus satisfaisant la définition 1.2 a une version continue, c'est-à-dire que ses trajectoires sont continues avec probabilité 1.

Nous allons maintenant prouver qu'un processus à trajectoires continues, satisfaisant la définition 1.2, existe bel en bien, en le construisant à partir d'une collection dénombrable de variables aléatoires Gaussiennes indépendantes. Le lemme de Borel–Cantelli joue un rôle important dans cette démonstration et dans la suite.

Lemme 1.3 (Borel–Cantelli). *Pour une suite d'événements* $\{A_n\}_{n\geqslant 0}$ *(pas nécessairement disjoints),*

$$\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}\{A_n\} < \infty \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}\Bigl\{\sum_{n\geqslant 0} 1_{\{A_n\}} = \infty\Bigr\} = 0, \tag{1.22}$$

c'est-à-dire que la probabilité qu'une infinité des événements $\{A_n\}_{n\geqslant 0}$ *soient réalisés à la fois est nulle.*

Théorème 1.4. *Il existe un processus stochastique* $\{B_t\}_{t\geqslant 0}$ *satisfaisant la définition 1.2, et dont les trajectoires* $t \mapsto B_t(\omega)$ *sont continues.*

Preuve:

1. Nous allons d'abord construire $\{B_t\}_{0\leqslant t\leqslant 1}$ à partir d'une collection de variables aléatoires gaussiennes indépendantes $V_1, V_{1/2}, V_{1/4}, V_{3/4}, V_{1/8}, \dots$, toutes d'espérance nulle, et avec V_1 et $V_{1/2}$ de variance 1 et $V_{k2^{-n}}$ de variance $2^{-(n-1)}$ ($k < 2^n$ impair).
   Montrons d'abord que si X_s et X_t sont deux variables aléatoires telles que $X_t - X_s$ soit Gaussienne centrée de variance $t-s$, alors il existe une variable aléatoire $X_{(t+s)/2}$ telle que les variables $X_t - X_{(t+s)/2}$ et $X_{(t+s)/2} - X_s$ soient i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, (t-s)/2)$. Si $U = X_t - X_s$ et V est indépendante de U, de même distribution, il suffit de définir $X_{(t+s)/2}$ par

$$\begin{aligned} X_t - X_{(t+s)/2} &= \frac{U+V}{2} \\ X_{(t+s)/2} - X_s &= \frac{U-V}{2}. \end{aligned} \tag{1.23}$$

   En effet, il est aisé de vérifier que ces variables ont la distribution souhaitée, et qu'elles sont indépendantes, puisque $\mathbb{E}\{(U+V)(U-V)\} = \mathbb{E}\{U^2\} - \mathbb{E}\{V^2\} = 0$.
   Posons alors $X_0 = 0$, $X_1 = V_1$, et construisons $X_{1/2}$ à l'aide de la procédure ci-dessus, avec $V = V_{1/2}$. Puis nous construisons $X_{1/4}$ à l'aide de X_0, $X_{1/2}$ et $V_{1/4}$, et ainsi de suite, pour obtenir une familles de variables $\{X_t\}_{t=k2^{-n}, n\geqslant 1, k<2^n}$ telles que pour $t > s$, $X_t - X_s$ soit indépendante de X_s et de loi $\mathcal{N}(0, t-s)$.

2. Pour $n \geqslant 0$, soit $\{B_t^{(n)}\}_{0\leqslant t\leqslant 1}$ le processus stochastique à trajectoires linéaires par morceaux sur les intervalles $[k2^{-n},(k+1)2^{-n}]$, $k < 2^n$, et tel que $B^{(n)}_{k2^{-n}} = X_{k2^{-n}}$. Nous voulons montrer que la suite des $B^{(n)}(\omega)$ converge uniformément sur $[0,1]$ pour toute réalisation ω des V_i. Il nous faut donc estimer

$$\begin{aligned}
\Delta^{(n)}(\omega) &= \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \bigl|B_t^{(n+1)}(\omega) - B_t^{(n)}(\omega)\bigr| \\
&= \max_{0\leqslant k\leqslant 2^{n-1}} \max_{k2^{-n}\leqslant t\leqslant (k+1)2^{-n}} \bigl|B_t^{(n+1)}(\omega) - B_t^{(n)}(\omega)\bigr| \\
&= \max_{0\leqslant k\leqslant 2^{n-1}} \Bigl|X_{(2k+1)2^{-(n+1)}}(\omega) - \frac{1}{2}\bigl(X_{k2^{-n}}(\omega) + X_{(k+1)2^{-n}}(\omega)\bigr)\Bigr|. \qquad (1.24)
\end{aligned}$$

Le terme en valeur absolue vaut $V_{(2k+1)2^{-(n+1)}}$ par construction, c.f. (1.23), qui est gaussienne de variance 2^{-n}. Il suit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\bigl\{\Delta^{(n)} > \sqrt{n2^{-n}}\bigr\} &= \mathbb{P}\Bigl\{\max_{0\leqslant k\leqslant 2^{n-1}} \bigl|V_{(2k+1)2^{-(n+1)}}\bigr| \geqslant 2\sqrt{n2^{-n}}\Bigr\} \\
&\leqslant 2\cdot 2^n \int_{2\sqrt{n2^{-n}}}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2\cdot 2^{-n}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi 2^{-n}}} \\
&= 2\cdot 2^n \int_{2\sqrt{n}}^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi}} \leqslant \mathit{const}\ 2^n\,\mathrm{e}^{-2n}, \qquad (1.25)
\end{aligned}$$

et donc

$$\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}\bigl\{\Delta^{(n)} > \sqrt{n2^{-n}}\bigr\} \leqslant \mathit{const} \sum_{n\geqslant 0} (2\,\mathrm{e}^{-2})^n < \infty. \qquad (1.26)$$

Le lemme de Borel–Cantelli nous permet de conclure qu'avec probabilité 1, il n'existe qu'un nombre fini de n pour lesquels $\Delta^{(n)} > \sqrt{n2^{-n}}$. Par conséquent,

$$\mathbb{P}\Bigl\{\sum_{n\geqslant 0} \Delta^{(n)} < \infty\Bigr\} = 1. \qquad (1.27)$$

La suite des $\{B_t^{(n)}\}_{0\leqslant t\leqslant 1}$ est donc une suite de Cauchy pour la norme sup avec probabilité 1, et alors elle converge uniformément. Nous posons pour $t \in [0,1]$

$$B_t^0 = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} B_t^{(n)} & \text{si la suite converge uniformément} \\ 0 & \text{sinon (avec probabilité 0).} \end{cases} \qquad (1.28)$$

Il est facile de vérifier que B^0 satisfait les trois propriétés de la définition.

3. Pour étendre le processus à des temps quelconques, nous fabriquons des copies indépendantes $\{B^i\}_{i\geqslant 0}$ et posons

$$B_t = \begin{cases} B_t^0 & 0 \leqslant t < 1 \\ B_1^0 + B_{t-1}^1 & 1 \leqslant t < 2 \\ B_1^0 + B_1^1 + B_{t-2}^2 & 2 \leqslant t < 3 \\ \dots \end{cases} \qquad (1.29)$$

Ceci conclut la démonstration. □

Remarquons, sans démonstration, que si les trajectoires du processus de Wiener sont continues, elles sont différentiables avec probabilité zéro.

1.3 Propriétés élémentaires du processus de Wiener

Les propriétés suivantes sont des conséquences directes de la définition 1.2 et nous les donnons sans démonstration détaillée.

1. **Propriété de Markov:** Pour tout ensemble de Borel $A \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\bigl\{B_{t+s} \in A \bigm| B_t = x\bigr\} = \int_A p(y, t+s|x, t) \,\mathrm{d}y, \tag{1.30}$$

indépendamment de $\{B_u\}_{u<t}$, avec des probabilités de transition gaussiennes

$$p(y, t+s|x, t) = \frac{\mathrm{e}^{-(y-x)^2/2s}}{\sqrt{2\pi s}}. \tag{1.31}$$

La preuve suit directement du fait que l'on peut décomposer $B_{t+s} = B_t + (B_{t+s} - B_t)$, le deuxième terme étant indépendant du premier et de loi $\mathcal{N}(0, s)$. On vérifiera en particulier l'équation de Chapman–Kolmogorov: Pour $t > u > s$,

$$p(y, t|x, s) = \int_{\mathbb{R}} p(y, t|z, u)p(z, u|x, s) \,\mathrm{d}u. \tag{1.32}$$

2. **Propriété différentielle:** Pour tout $t \geqslant 0$, $\{B_{t+s} - B_t\}_{s \geqslant 0}$ est un mouvement Brownien standard, indépendant de $\{B_u\}_{u<t}$.
3. **Propriété d'échelle:** Pour tout $c > 0$, $\{cB_{t/c^2}\}_{s \geqslant 0}$ est un mouvement Brownien standard.
4. **Symétrie:** $\{-B_t\}_{t \geqslant 0}$ est un mouvement Brownien standard.
5. **Processus Gaussien:** Le processus de Wiener est Gaussien de moyenne nulle (c'est-à-dire que ses distributions jointes finies sont normales centrées), et il est caractérisé par sa covariance

$$\mathrm{Cov}\{B_t, B_s\} \equiv \mathbb{E}\{B_t B_s\} = s \wedge t \tag{1.33}$$

($s \wedge t$ désigne le minimum de s et t).

PREUVE: Pour $s < t$, nous avons

$$\mathbb{E}\{B_t B_s\} = \mathbb{E}\{B_s(B_s + B_t - B_s)\} = \mathbb{E}\{B_s^2\} + \mathbb{E}\{B_s(B_t - B_s)\} = s, \tag{1.34}$$

puisque le deuxième terme est nul par la propriété d'incréments indépendants. □

En fait, un processus Gaussien centré, dont la covariance satisfait (1.33) est un processus de Wiener standard.

6. **Renversement du temps:** Le processus $\{X_t\}_{t \geqslant 0}$ défini par

$$X_t = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ tB_{1/t} & \text{si } t > 0 \end{cases} \tag{1.35}$$

est un processus de Wiener standard.

PREUVE: X_t est un processus Gaussien de moyenne nulle, et un calcul simple montre que sa covariance est bien $\mathrm{Cov}\{X_t, X_s\} = s \wedge t$. Le seul point non trivial est de montrer la continuité en zéro de X_t. Celle-ci est équivalente à la loi forte des grands nombres. □

1.4 Temps d'arrêt et principe de réflexion

La propriété différentielle du processus de Wiener reste vraie si le temps déterministe t est remplacé par un certain type de temps aléatoire, appelé un *temps d'arrêt.*

Définition 1.5. *Soit $\mathcal{F}_t$ la plus petite σ-algèbre engendrée par les événements du type $\{a \leqslant B_s < b\}_{s \leqslant t, a<b}$ (on dit que $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geqslant 0}$ est la* filtration *engendrée par le processus de Wiener). La variable aléatoire $\tau \in [0, \infty]$ est un* temps d'arrêt *si l'événement $\{\tau < t\}$ appartient à $\mathcal{F}_t$ pour tout $t \geqslant 0$.*

Intuitivement, $\mathcal{F}_t$ contient tous les événements ne dépendant que de l'histoire du processus jusqu'au temps t. τ est un temps d'arrêt si la connaissance de l'histoire jusqu'au temps t suffit à déterminer si $\tau < t$. Ainsi, par exemple, un temps de premier passage

$$\tau = \inf\{s \geqslant 0 \colon B_s = 1\} \tag{1.36}$$

est un temps d'arrêt, alors qu'un temps de dernier passage

$$\tau = \sup\{s \leqslant 1 \colon B_s = 1\} \tag{1.37}$$

n'en est pas un.

Théorème 1.6. *Si τ est un temps d'arrêt tel que $\mathbb{P}\{\tau < \infty\} = 1$, alors $\{B_{\tau+t} - B_\tau\}_{t \geqslant 0}$ est un mouvement Brownien, indépendant de $\cap_{s>\tau} \mathcal{F}_s$.*

PREUVE: Voir par exemple [McK69], p. 10. □

Le résultat suivant, très utile pour des estimations de temps de premier passage, suit immédiatement du théorème ci-dessus, de la propriété des incréments indépendants et de la propriété de symétrie.

Corollaire 1.7 (Principe de réflexion). *Pour $L > 0$ et $\tau = \inf\{t \geqslant 0 \colon B_t = L\}$, le processus*

$$B_t^\star = \begin{cases} B_t & \text{si } t \leqslant \tau \\ 2L - B_t & \text{si } t > \tau \end{cases} \tag{1.38}$$

est un mouvement Brownien.

Nous donnerons une application classique du principe de réflexion.

Corollaire 1.8. *Pour tout $L \geqslant 0$,*

$$\mathbb{P}\Big\{\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} B_s \geqslant L\Big\} = 2\mathbb{P}\{B_t \geqslant L\}. \tag{1.39}$$

PREUVE: Si $\tau = \inf\{t \geqslant 0 \colon B_t = L\}$, alors $\{\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} B_s \geqslant L\} = \{\tau \leqslant t\}$. Les trajectoires du mouvement Brownien étant continues, $B_t \geqslant L$ implique $\tau \leqslant t$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{B_t \geqslant L\} &= \mathbb{P}\{B_t \geqslant L, \tau \leqslant t\} \\ &= \mathbb{P}\{2L - B_t \leqslant L, \tau \leqslant t\} \\ &= \mathbb{P}\{B_t^\star \leqslant L, \tau \leqslant t\} \\ &= \mathbb{P}\{B_t \leqslant L, \tau \leqslant t\}. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Le résultat suit de la décomposition $\mathbb{P}\{\tau \leqslant t\} = \mathbb{P}\{B_t \leqslant L, \tau \leqslant t\} + \mathbb{P}\{B_t > L, \tau \leqslant t\}$. □

1.5 Martingales et inégalité de Doob

L'inégalité de Doob permet d'obtenir d'autres estimations sur le maximum de certains processus stochastiques, qui seront utiles dans la discussion des intégrales stochastiques. Dans ce qui suit, $\{\mathcal{F}_s\}_{s\geqslant 0}$ désignera toujours la filtration engendrée par un processus de Wiener.

Définition 1.9. *Supposons que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, et soit X une variable aléatoire intégrable, mesurable par rapport à $\mathcal{F}_t$ (c'est-à-dire que la préimage de tout ensemble mesurable dans l'image de X appartient à $\mathcal{F}_t$). On appelle* espérance conditionnelle $\mathbb{E}\{X|\mathcal{F}_s\}$ *la variable aléatoire mesurable par rapport à $\mathcal{F}_s$ satisfaisant*

$$\mathbb{E}\{XY\} = \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{X|\mathcal{F}_s\}Y\} \tag{1.41}$$

pour tout Y borné, mesurable par rapport à $\mathcal{F}_s$.

On notera en particulier que si X est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_s$, alors $\mathbb{E}\{X|\mathcal{F}_s\} = X$.

Définition 1.10. *Un processus $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ est une* martingale *(respectivement une* sous-martingale*) si pour tout $t \geqslant 0$*

1. *M_t est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_t$;*
2. *$\mathbb{E}\{|M_t|\} < \infty$;*
3. *$\mathbb{E}\{M_t|\mathcal{F}_s\} = M_s$ pour tout $s < t$ (respectivement $\mathbb{E}\{M_t|\mathcal{F}_s\} \geqslant M_s$).*

En particulier, on a $\mathbb{E}\{M_t\} = \mathbb{E}\{M_0\}$ si M_t est une martingale, et $\mathbb{E}\{M_t\} \geqslant \mathbb{E}\{M_s\}$ pour $t > s$ si M_t est une sous-martingale. Le processus de Wiener est une martingale puisque pour tout Y mesurable par rapport à $\mathcal{F}_s$,

$$\mathbb{E}\{B_tY\} = \mathbb{E}\{B_sY\} + \mathbb{E}\{(B_t - B_s)Y\} = \mathbb{E}\{B_sY\}. \tag{1.42}$$

Proposition 1.11 (Inégalité de sous-martingale de Doob). *Soit M_t une sous-martingale à trajectoires continues. Alors pour tout $L > 0$,*

$$\mathbb{P}\Bigl\{\sup_{0\leqslant s\leqslant t} M_s \geqslant L\Bigr\} \leqslant \frac{1}{L}\mathbb{E}\{M_t \vee 0\}. \tag{1.43}$$

Preuve: Soit $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ une partition de l'intervalle $[0,t]$ et soit $\tau = \inf\{t_k > 0\colon M_{t_k} \geqslant L\}$. Le processus $M^+ = M \vee 0$ étant aussi une sous-martingale, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{M_t^+\} &\geqslant \mathbb{E}\bigl\{1_{\{\tau\leqslant t\}}M_t^+\bigr\} \\
&= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\bigl\{1_{\{\tau=t_k\}}M_t^+\bigr\} \\
&= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\bigl\{1_{\{\tau=t_k\}}\mathbb{E}\{M_t^+|\mathcal{F}_{t_k}\}\bigr\} \\
&\geqslant \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\bigl\{1_{\{\tau=t_k\}}M_{t_k}^+\bigr\} \\
&= L\sum_{k=1}^n \mathbb{P}\{\tau = t_k\}.
\end{aligned} \tag{1.44}$$

Comme par ailleurs

$$\mathbb{P}\Big\{\sup_k M_{t_k} \geqslant L\Big\} = \mathbb{P}\{\tau \leqslant t\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{\tau = t_k\}, \tag{1.45}$$

il suit que

$$\mathbb{P}\Big\{\sup_k M_{t_k} \geqslant L\Big\} \leqslant \frac{1}{L}\mathbb{E}\{M_t^+\} \tag{1.46}$$

En prenant des partitions plus fines, le membre de gauche croît, alors que le membre de droite ne change pas. Le résultat s'obtient en faisant tendre la partition vers un sous-ensemble dense de $[0,t]$. □

Proposition 1.12. *Pour tout $\gamma > 0$,*

$$M_t = \exp\Big\{\gamma B_t - \gamma^2 \frac{t}{2}\Big\} \tag{1.47}$$

est une martingale.

Preuve: Notons tout d'abord que

$$\mathbb{E}\{M_t\} = \int \mathrm{e}^{\gamma x - \gamma^2 t/2} \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}} \,\mathrm{d}x = 1. \tag{1.48}$$

Nous pouvons décomposer $M_t = RM_s$, où $R = \mathrm{e}^{\gamma(B_t - B_s) - \gamma^2(t-s)/2}$ est indépendant de M_s et satisfait $\mathbb{E}\{R\} = \mathbb{E}\{M_{t-s}\} = 1$. Par conséquent, pour tout Y mesurable par rapport à $\mathcal{F}_s$,

$$\mathbb{E}\{M_t Y\} = \mathbb{E}\{RM_s Y\} = \mathbb{E}\{R\}\mathbb{E}\{M_s Y\} = \mathbb{E}\{M_s Y\}, \tag{1.49}$$

ce qui confirme que $\mathbb{E}\{M_t | \mathcal{F}_s\} = M_s$. □

Une application de l'inégalité de Doob nous donne immédiatement

Corollaire 1.13. *Pour tout $\gamma, L > 0$,*

$$\mathbb{P}\Big\{\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \Big[B_s - \gamma \frac{s}{2}\Big] > L\Big\} \leqslant \mathrm{e}^{-\gamma L}. \tag{1.50}$$

Cette inégalité nous sera utile pour démontrer la continuité des intégrales stochastiques dans la section suivante. Ici nous nous contenterons de mentionner, sans démonstration, deux conséquences de (1.50): La *loi du logarithme itéré*

$$\mathbb{P}\Big\{\limsup_{t \to 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log|\log t|}} = 1\Big\} = 1, \tag{1.51}$$

et le *module de Lévy*

$$\mathbb{P}\Big\{\limsup_{\delta \to 0} \frac{|B_{t+\delta} - B_t|}{\sqrt{2\delta |\log \delta|}} = 1\Big\} = 1. \tag{1.52}$$

2 Intégrales stochastiques

Le but de l'intégrale stochastique est de donner un sens à des équations de la forme

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = f(X) + g(X)\frac{\mathrm{d}B_t}{\mathrm{d}t}. \tag{2.1}$$

Par exemple, si $f \equiv 0$ et $g \equiv 1$, on devrait retrouver $X_t = X_0 + B_t$, décrivant le mouvement suramorti d'une particule Brownienne.

Le problème est que, comme nous l'avons mentionné, les trajectoires du processus de Wiener ne sont pas différentiables, ni même à variations bornées.

Comme dans le cas des équations différentielles ordinaires, on interprête une solution de l'équation différentielle (2.1) comme une solution de l'équation intégrale

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t g(X_s)\,\mathrm{d}B_s. \tag{2.2}$$

C'est à la deuxième intégrale qu'il s'agit de donner un sens mathématique. Si $s \mapsto g(X_s)$ était différentiable, on pourrait le faire à l'aide d'une intégration par parties, mais ce n'est en général pas le cas. Itô a donné une autre définition de l'intégrale stochastique, qui s'applique à une classe beaucoup plus vaste d'intégrants (et donne le même résultat que l'intégration par parties dans le cas différentiable).

2.1 Définition de l'intégrale d'Itô

Notre but est de définir l'intégrale stochastique

$$\int_0^t X_s\,\mathrm{d}B_s \tag{2.3}$$

simultanément pour tous les $t \in [0,T]$, où X_t est lui-même un processus stochastique. Plus précisément, nous supposerons que X_t est une *fonctionnelle Brownienne non-anticipative*, c'est-à-dire ($\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ désignant la filtration canonique engendrée par $\{B_t\}_{t\geqslant 0}$)

1. X est mesurable par rapport à $\mathcal{F}$;
2. X_t est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_t$ pour tout $t \in [0,T]$.

Ceci revient à exiger que X_t ne dépende que de l'histoire du processus de Wiener jusqu'au temps t, ce qui est raisonnable au vu de (2.2). En outre, nous allons supposer que

$$\mathbb{P}\biggl\{\int_0^T X_t^2\,\mathrm{d}t < \infty\biggr\} = 1. \tag{2.4}$$

Remarque 2.1. On peut admettre que X_t dépende de variables aléatoires supplémentaires, indépendantes de B_t; par exemple, la condition initiale peut être aléatoire. Il convient alors d'étendre les σ-algèbres $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_t$ dans la définition ci-dessus à des algèbres plus grandes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_t$, où $\mathcal{A}_t$ ne doit pas dépendre de l'algèbre engendrée par $\{B_{t+s} - B_t\}_{s\geqslant 0}$.

Dans un premier temps, nous allons définir l'intégrale stochastique pour un intégrant *simple*.

Définition 2.2. *Une fonctionnelle Brownienne non-anticipative* $\{e_t\}_{t\in[0,T]}$ *est dite* simple *ou* élémentaire *s'il existe une partition* $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ *de* $[0,T]$ *telle que*

$$e_t = \sum_{k=1}^N e_{t_k} 1_{[t_{k-1},t_k)}(t). \tag{2.5}$$

Pour une telle fonctionnelle, nous définissons l'intégrale stochastique par

$$\int_0^t e_s \,\mathrm{d}B_s = \sum_{k=1}^{m} e_{t_{k-1}} \big[B_{t_k} - B_{t_{k-1}}\big] + e_{t_m} \big[B_t - B_{t_m}\big], \tag{2.6}$$

où m est tel que $t \in [t_m, t_{m+1})$.

Il est aisé de vérifier les propriétés suivantes:

1. Pour deux fonctionnelles simples $e^{(1)}$ et $e^{(2)}$,

$$\int_0^t \big(e_s^{(1)} + e_s^{(2)}\big) \,\mathrm{d}B_s = \int_0^t e_s^{(1)} \,\mathrm{d}B_s + \int_0^t e_s^{(2)} \,\mathrm{d}B_s. \tag{2.7}$$

2. Pour toute constante c,

$$\int_0^t \big(ce_s\big) \,\mathrm{d}B_s = c \int_0^t e_s \,\mathrm{d}B_s. \tag{2.8}$$

3. L'intégrale (2.6) est une fonction continue de t.
4. Si $\int_0^t \mathbb{E}\{e_s^2\} \,\mathrm{d}s < \infty$, on a l'*isométrie d'Itô*

$$\mathbb{E}\bigg\{\bigg(\int_0^t e_s \,\mathrm{d}B_s\bigg)^2\bigg\} = \int_0^t \mathbb{E}\{e_s^2\} \,\mathrm{d}s. \tag{2.9}$$

Preuve: Posons $t_{m+1} = t$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\bigg\{\bigg(\int_0^t e_s \,\mathrm{d}B_s\bigg)^2\bigg\} &= \mathbb{E}\bigg\{\sum_{k,l=1}^{m+1} e_{t_{k-1}} e_{t_{l-1}} \big(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}\big)\big(B_{t_l} - B_{t_{l-1}}\big)\bigg\} \\
&= \sum_{k=1}^{m+1} \mathbb{E}\big\{e_{t_{k-1}}^2\big\} \underbrace{\mathbb{E}\big\{\big(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}\big)^2\big\}}_{t_k - t_{k-1}} \\
&= \int_0^t \mathbb{E}\{e_s^2\} \,\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Nous avons utilisé la propriété des incréments indépendants afin d'éliminer les termes $k \neq l$ de la double somme, et le fait que e_s est nonanticipative. □

L'idée d'Itô pour définir l'intégrale stochastique d'une fonctionnelle non-anticipative générale X est de trouver une suite de fonctionnelles simples $e^{(n)}$ approchant X dans $L^2(\mathbb{P})$, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \mathbb{E}\big\{\big(X_s - e_s^{(n)}\big)^2\big\} \,\mathrm{d}s = 0. \tag{2.11}$$

L'isométrie (2.9) nous permet alors d'affirmer que la limite suivante existe dans $L^2(\mathbb{P})$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t e_s^{(n)} \,\mathrm{d}B_s =: \int_0^t X_s \,\mathrm{d}B_s. \tag{2.12}$$

C'est par définition l'intégrale d'Itô de X_s.

Nous allons maintenant prouver que cette construction est bien possible, indépendante de la suite des $e^{(n)}$, et que l'intégrale résultante est une fonction continue de t. Nous commençons par énoncer deux lemmes préparatoires.

Lemme 2.3. *Pour toute fonctionnelle non-anticipative X satisfaisant* (2.4)*, il existe une suite $\{e^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ de fonctionnelles simples telles que*

$$\mathbb{P}\bigg\{\int_0^T \big(X_t - e_t^{(n)}\big)^2 \,\mathrm{d}t \leqslant 2^{-n}, n \to \infty\bigg\} = 1. \tag{2.13}$$

Preuve: Considérons les fonctionnelles simples

$$e_t^{(m,k)} = 2^k \int_{(2^{-m}\lfloor 2^m t\rfloor - 2^{-k})\vee 0}^{2^{-m}\lfloor 2^m t\rfloor} X_s \,\mathrm{d}s. \tag{2.14}$$

Faisant tendre d'abord m, puis k vers l'infini, on s'aperçoit que $\int_0^T (X_t - e_t^{(m,k)})^2 \,\mathrm{d}t \to 0$. On peut donc trouver des suites m_n et k_n telles que $e^{(n)} = e^{(m_n,k_n)}$ satisfasse

$$\mathbb{P}\bigg\{\int_0^T (X_t - e_t^{(n)})^2 \,\mathrm{d}t > 2^{-n}\bigg\} \leqslant 2^{-n}. \tag{2.15}$$

La relation (2.13) suit alors du lemme de Borel–Cantelli. □

Lemme 2.4. *Pour une suite $\{f^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ de fonctionnelles nonanticipatives simples satisfaisant $\mathbb{P}\{\int_0^T (f_t^{(n)})^2 \,\mathrm{d}t \leqslant 2^{-n}, n \to \infty\} = 1$ et tout $\theta > 1$,*

$$\mathbb{P}\bigg\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\bigg|\int_0^t f_s^{(n)} \,\mathrm{d}B_s\bigg| < \theta\sqrt{\frac{\log n}{2^{n-1}}}, n \to \infty\bigg\} = 1. \tag{2.16}$$

Preuve: Le processus stochastique

$$M_t^{(n)} = \exp\bigg\{\int_0^t f_s^{(n)} \,\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^t (f_s^{(n)})^2 \,\mathrm{d}s\bigg\} \tag{2.17}$$

est une martingale par rapport à $\{B_t\}_{t\geqslant 0}$. En effet, nous avons démontré cette propriété pour $f^{(n)} \equiv 1$ dans la proposition 1.12. La même démonstration montre que si $f^{(n)} \equiv c$ où c est une variable aléatoire mesurable par rapport à $\mathcal{F}_s$, alors $\mathbb{E}\{M_t|\mathcal{F}_s\} = M_s$. Le cas d'un $f^{(n)}$ simple arbitraire est alors traité par récurrence.

L'inégalité de Doob implique

$$\mathbb{P}\bigg\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\bigg(\int_0^t f_s^{(n)} \,\mathrm{d}B_s - \frac{\gamma}{2}\int_0^t (f_s^{(n)})^2 \,\mathrm{d}s\bigg) > L\bigg\} \leqslant \mathrm{e}^{-\gamma L}. \tag{2.18}$$

Posons alors $\gamma = \sqrt{2^{n+1}\log n}$ et $L = \theta\sqrt{2^{-(n+1)}\log n}$. Utilisant l'hypothèse sur les $f^{(n)}$, nous obtenons

$$\mathbb{P}\bigg\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\bigg(\int_0^t f_s^{(n)} \,\mathrm{d}B_s\bigg) > (1+\theta)\sqrt{2^{-(n+1)}\log n}\bigg\} \leqslant \mathrm{e}^{-\theta\log n} = n^{-\theta}. \tag{2.19}$$

Le lemme de Borel–Cantelli nous permet alors de conclure. □

Théorème 2.5. *La limite* (2.12) *existe, est indépendante de la suite des $\{e^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ convergeant vers X, et est une fonction continue de t.*

Preuve: Quitte à passer à une sous-suite, nous pouvons choisir les $e^{(n)}$ de manière à satisfaire (2.13). Mais ceci implique aussi que

$$\mathbb{P}\biggl\{\int_0^T \bigl(e_t^{(n)} - e_t^{(n-1)}\bigr)^2 \,\mathrm{d}t \leqslant \mathit{const}\; 2^{-n}, n \to \infty\biggr\} = 1. \tag{2.20}$$

Le lemme 2.4 montre alors que

$$\mathbb{P}\biggl\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\biggl|\int_0^t \bigl(e_s^{(n)} - e_s^{(n-1)}\bigr) \,\mathrm{d}B_s\biggr| < \mathit{const}\;\theta\sqrt{\frac{\log n}{2^{n-1}}}, n \to \infty\biggr\} = 1. \tag{2.21}$$

Ainsi la suite des $\int_0^t e_s^{(n)} \,\mathrm{d}B_s$ est de Cauchy presque sûrement, et dans ce cas elle converge uniformément. □

2.2 Propriétés élémentaires de l'intégrale d'Itô

Les propriétés suivantes sont prouvées aisément pour des processus X et Y nonanticipatifs satisfaisant la condition d'intégrabilité (2.4).

1. **Linéarité:**

$$\int_0^t (X_s + Y_s) \,\mathrm{d}B_s = \int_0^t X_s \,\mathrm{d}B_s + \int_0^t Y_s \,\mathrm{d}B_s \tag{2.22}$$

et

$$\int_0^t (cX_s) \,\mathrm{d}B_s = c\int_0^t X_s \,\mathrm{d}B_s. \tag{2.23}$$

2. **Additivité:** Pour $0 \leqslant s < u < t \leqslant T$,

$$\int_s^t X_v \,\mathrm{d}B_v = \int_s^u X_v \,\mathrm{d}B_v + \int_u^t X_v \,\mathrm{d}B_v. \tag{2.24}$$

3. Pour un temps d'arrêt τ,

$$\int_0^{\tau\wedge T} X_t \,\mathrm{d}B_t = \int_0^T 1_{\{t\leqslant\tau\}} X_t \,\mathrm{d}B_t. \tag{2.25}$$

4. Si $\int_0^T \mathbb{E}\{X_t^2\} \,\mathrm{d}t < \infty$, alors pour tout $t \leqslant T$,

$$\mathbb{E}\biggl\{\int_0^t X_s \,\mathrm{d}B_s\biggr\} = 0 \tag{2.26}$$

et

$$\mathbb{E}\biggl\{\biggl(\int_0^t X_s \,\mathrm{d}B_s\biggr)^2\biggr\} = \int_0^t \mathbb{E}\{X_s^2\} \,\mathrm{d}s. \tag{2.27}$$

De plus, le processus $\bigl\{\int_0^t X_s \,\mathrm{d}B_s\bigr\}_{s\geqslant 0}$ est une martingale.

5. Le processus

$$M_t = \exp\biggl\{\int_0^t X_s \,\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^t X_s^2 \,\mathrm{d}s\biggr\} \tag{2.28}$$

est une supermartingale, c'est-à-dire que $-M_t$ est une sous-martingale et $\mathbb{E}\{M_t\} \leqslant 1$.

2.3 Un exemple

Nous donnons ici un exemple de calcul explicite d'une intégrale stochastique par la méthode d'Itô:

$$\int_0^t B_s \, \mathrm{d}B_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{t}{2}. \tag{2.29}$$

Le résultat, quelque peu surprenant au premier abord, prendra tout son sens lorsque nous aurons vu la formule d'Itô.

Considérons la suite de fonctionnelles simples définies par $e_t^{(n)} = B_{2^{-n}\lfloor 2^n t\rfloor}$. Il suffit alors de vérifier que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t e_s^{(n)} \, \mathrm{d}B_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{t}{2}. \tag{2.30}$$

Notons $t_k = k2^{-n}$ pour $k \leqslant m = \lfloor 2^n t\rfloor$ et $t_{m+1} = t$. Il suit de la définition (2.6) que

$$\begin{aligned}
2\int_0^t e_s^{(n)} \, \mathrm{d}B_s &= 2\sum_{k=1}^{m+1} B_{t_{k-1}}\bigl(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}\bigr) \\
&= \sum_{k=1}^{m+1} \Bigl[B_{t_k}^2 - B_{t_{k-1}}^2 - \bigl(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}\bigr)^2\Bigr] \\
&= B_t^2 - \sum_{k=1}^{m+1} \bigl(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}\bigr)^2.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Considérons la martingale

$$M_t^{(n)} = \sum_{k=1}^{m+1} \bigl(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}\bigr)^2 - t = \sum_{k=1}^{m+1} \bigl[\bigl(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}\bigr)^2 - \bigl(t_k - t_{k-1}\bigr)\bigr]. \tag{2.32}$$

Les termes de la somme sont indépendants et d'espérance nulle. Nous avons donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\bigl\{\bigl(M_t^{(n)}\bigr)^2\bigr\} &= \sum_{k=1}^{m+1} \mathbb{E}\bigl\{\bigl[\bigl(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}\bigr)^2 - \bigl(t_k - t_{k-1}\bigr)\bigr]^2\bigr\} \\
&\leqslant (m+1)\mathbb{E}\bigl\{\bigl[\bigl(B_{t_1} - B_{t_0}\bigr)^2 - \bigl(t_1 - t_0\bigr)\bigr]^2\bigr\} \\
&\leqslant \mathit{const}\; 2^n \mathbb{E}\bigl\{\bigl[\bigl(B_{2^{-n}}\bigr)^2 - 2^{-n}\bigr]^2\bigr\} \\
&= \mathit{const}\; 2^{-n} \mathbb{E}\bigl\{\bigl[\bigl(B_1\bigr)^2 - 1\bigr]^2\bigr\} \\
&\leqslant \mathit{const}\; 2^{-n},
\end{aligned} \tag{2.33}$$

à cause de la propriété d'échelle. $\bigl(M_t^{(n)}\bigr)^2$ étant une sous-martingale, l'inégalité de Doob nous donne

$$\mathbb{P}\Bigl\{\sup_{0\leqslant s\leqslant t} \bigl(M_s^{(n)}\bigr)^2 > n^2 2^{-n}\Bigr\} \leqslant 2^n n^{-2} \mathbb{E}\bigl\{\bigl(M_t^{(n)}\bigr)^2\bigr\} \leqslant \mathit{const}\; n^{-2}. \tag{2.34}$$

Le lemme de Borel–Cantelli nous permet alors de conclure que

$$\mathbb{P}\Bigl\{\sup_{0\leqslant s\leqslant t} \bigl|M_s^{(n)}\bigr| < n2^{-n/2}, n \to \infty\Bigr\} = 1, \tag{2.35}$$

ce qui prouve (2.30).

2.4 La formule d'Itô

Considérons une intégrale stochastique de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t f_s \,\mathrm{d}s + \int_0^t g_s \,\mathrm{d}B_s, \qquad t \in [0,T] \tag{2.36}$$

où X_0 est indépendante du mouvement Brownien, et f_s et g_s sont des fonctionnelles nonanticipatives satisfaisant

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\biggl\{\int_0^T |f_s| \,\mathrm{d}s < \infty\biggr\} &= 1 \\ \mathbb{P}\biggl\{\int_0^T g_s^2 \,\mathrm{d}s < \infty\biggr\} &= 1.\end{aligned} \tag{2.37}$$

Le processus (2.36) s'écrit également sous forme différentielle

$$\mathrm{d}X_t = f_t \,\mathrm{d}t + g_t \,\mathrm{d}B_t. \tag{2.38}$$

Par exemple, la relation (2.29) est équivalente à

$$\mathrm{d}(B_t^2) = \mathrm{d}t + 2B_t \,\mathrm{d}B_t. \tag{2.39}$$

La formule d'Itô permet de déterminer de manière générale l'effet d'un changement de variables sur une différentielle stochastique.

Lemme 2.6 (Formule d'Itô). *Soit $u : [0,\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto u(t,x)$ une fonction continûment différentiable par rapport à t et deux fois continûment différentiable par rapport à x. Alors le processus stochastique $Y_t = u(t,X_t)$ satisfait l'équation*

$$\mathrm{d}Y_t = \frac{\partial u}{\partial t}(t,X_t)\,\mathrm{d}t + \frac{\partial u}{\partial x}(t,X_t)\bigl[f_t \,\mathrm{d}t + g_t \,\mathrm{d}B_t\bigr] + \frac12 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,X_t) g_t^2 \,\mathrm{d}t. \tag{2.40}$$

Remarque 2.7.

1. Un moyen mnémotechnique pour retrouver la formule est de l'écrire sous la forme

$$\mathrm{d}Y_t = \frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}X_t + \frac12 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\mathrm{d}X_t^2, \tag{2.41}$$

   où $\mathrm{d}X_t^2$ se calcule en utilisant les règles

$$\mathrm{d}t^2 = \mathrm{d}t\,\mathrm{d}B_t = 0, \qquad \mathrm{d}B_t^2 = \mathrm{d}t. \tag{2.42}$$

2. La formule se généralise à des fonctions $u(t, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)})$, dépendant de n processus définis par $\mathrm{d}X_t^{(i)} = f_t^{(i)}\,\mathrm{d}t + g_t^{(i)}\,\mathrm{d}B_t$, en

$$\mathrm{d}Y_t = \frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\,\mathrm{d}X_t^{(i)} + \frac12 \sum_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\,\mathrm{d}X_t^{(i)}\,\mathrm{d}X_t^{(j)}, \tag{2.43}$$

   où $\mathrm{d}X_t^{(i)}\,\mathrm{d}X_t^{(j)} = g_t^{(i)} g_t^{(j)}\,\mathrm{d}t$.

Exemple 2.8.

1. Si $X_t = B_t$ et $u(x) = x^2$, on retrouve la relation (2.39).
2. Si $\mathrm{d}X_t = g_t \,\mathrm{d}B_t - \frac{1}{2} g_t^2 \,\mathrm{d}t$ et $u(x) = \mathrm{e}^x$, on obtient

$$\mathrm{d}(\mathrm{e}^{X_t}) = g_t e^{X_t} \,\mathrm{d}B_t. \tag{2.44}$$

Ainsi la martingale $M_t = \exp\bigl\{\gamma B_t - \gamma^2 \frac{t}{2}\bigr\}$ de la proposition 1.12 est la solution de l'équation $\mathrm{d}M_t = \gamma M_t \,\mathrm{d}B_t$.

Preuve du Lemme 2.6. Il suffit de prouver le résultat pour des fonctionnelles simples, et par l'additivité des intégrales, on peut se ramener au cas de fonctionnelles constantes. Mais alors $X_t = f_0 t + g_0 B_t$ et $Y_t = u(t, f_0 t + g_0 B_t)$ peut s'exprimer comme une fonction de (t, B_t). Il suffit en définitive de considérer le cas $X_t = B_t$. Or pour une partition $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$, on a

$$\begin{aligned}
u(t, B_t) - u(0,0) &= \sum_{k=1}^n \bigl[u(t_k, B_{t_k}) - u(t_{k-1}, B_{t_k})\bigr] + \bigl[u(t_{k-1}, B_{t_k}) - u(t_{k-1}, B_{t_{k-1}})\bigr] \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial t}(t_{k-1}, B_{t_k})(t_k - t_{k-1}) + \frac{\partial u}{\partial x}(t_{k-1}, B_{t_{k-1}})(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}) \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_{k-1}, B_{t_{k-1}})(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2 + \mathcal{O}(t_k - t_{k-1}) + \mathcal{O}((B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2) \\
&= \int_0^t \frac{\partial u}{\partial t}(s, B_s) \,\mathrm{d}s + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(s, B_s) \,\mathrm{d}B_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(s, B_s) \,\mathrm{d}s \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_{k-1}, B_{t_{k-1}})\bigl[(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2 - (t_k - t_{k-1})\bigr] + \mathcal{O}(1).
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Or la somme se traite comme $M_t^{(n)}$ dans la section 2.3 lorsque $t_k - t_{k-1} \to 0$, c.f. (2.32). □

3 Equations différentielles stochastiques

3.1 Solutions fortes

Nous avons maintenant tous les éléments en main pour définir la notion de solution d'une équation différentielle stochastique (EDS), de la forme

$$\mathrm{d}x_t = f(x_t, t) \,\mathrm{d}t + g(x_t, t) \,\mathrm{d}B_t, \tag{3.1}$$

où $f, g : \mathbb{R} \times [0, T] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions déterministes mesurables.

Définition 3.1. *Un processus stochastique* $\{x_t\}_{t \in [0,T]}$ *est appelé une* solution forte *de l'EDS* (3.1) *avec condition initiale* x_0 *si*

- x_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable pour tout* $t \in [0, T]$*;*
- *on a les conditions de régularité*

$$\mathbb{P}\biggl\{\int_0^T |f(x_s, s)| \,\mathrm{d}s < \infty\biggr\} = \mathbb{P}\biggl\{\int_0^T g(x_s, s)^2 \,\mathrm{d}s < \infty\biggr\} = 1; \tag{3.2}$$

- *pour tout* $t \in [0,T]$, *on a*

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(x_s,s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t g(x_s,s)\,\mathrm{d}B_s \tag{3.3}$$

avec probabilité 1.

Une solution forte se construit par itérations de Picard. Soit $x_t^{(0)}$ le processus identiquement égal à x_0. On définit par récurence

$$x_t^{(n+1)} = x_0 + \int_0^t f(x_s^{(n)},s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t g(x_s^{(n)},s)\,\mathrm{d}B_s, \tag{3.4}$$

et l'on examine sous quelles conditions cette suite converge presque sûrement vers un processus continu. Remarquons que par construction, $x_t^{(n)}$ est automatiquement $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout t et tout n.

Le résultat est pratiquement le même que pour les équations différentielles ordinaires:

Théorème 3.2. *Supposons que les fonctions* f *et* g *satisfont les deux conditions suivantes:*

1. Condition de Lipschitz locale: *Pour tout compact* $\mathcal{K} \in \mathbb{R}$, *il existe une constante* $K = K(\mathcal{K})$ *telle que*

$$|f(x,t) - f(y,t)| + |g(x,t) - g(y,t)| \leqslant K|x-y| \tag{3.5}$$

pour $x,y \in \mathcal{K}$ *et* $t \in [0,T]$.

2. Condition de croissance: *Il existe une constante* L *telle que*

$$xf(x,t) + g(x,t)^2 \leqslant L^2(1+x^2) \tag{3.6}$$

pour tous x,t.

Alors l'EDS (3.1) *admet, pour toute condition initiale, une solution forte* $\{x_t\}_{t\in[0,T]}$, *presque sûrement continue. Cette solution est unique dans le sens que si* $\{x_t\}_{t\in[0,T]}$ *et* $\{y_t\}_{t\in[0,T]}$ *sont deux solutions presque sûrement continues, alors*

$$\mathbb{P}\Bigl\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |x_t - y_t| > 0\Bigr\} = 0. \tag{3.7}$$

Le processus $\{x_t\}_{t\in[0,T]}$ est appelé un *processus de diffusion*, ou simplement une *diffusion.* On a coutume de dénoter par $\mathbb{P}^{x_0}$ la loi du processus avec condition initiale x_0, et par $\mathbb{E}^{x_0}$ les espérances par rapport à $\mathbb{P}^{x_0}$. Plus généralement, $\mathbb{P}^{t_0,x_0}$ désigne la loi d'un processus de condition initiale $x_{t_0} = x_0$.

La condition de croissance (3.6) autorise une croissance linéaire, par exemple $f(x,t) = x$. Elle autorise également une croissance surlinéaire du bon signe, comme $f(x,t) = -x^3$. Par contre, $f(x,t) = x^2$ ne satisfait pas cette condition. Dans ce cas, même en l'absence de bruit, les solutions peuvent diverger après un temps fini.

Exemple 3.3. L'EDS linéaire

$$\mathrm{d}x_t = -\gamma x_t\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t \tag{3.8}$$

admet une solution forte. La formule d'Itô montre que cette solution peut s'écrire sous forme intégrale comme

$$x_t = x_0\,\mathrm{e}^{-\gamma t} + \int_0^t \mathrm{e}^{-\gamma(t-s)}\,\mathrm{d}B_s. \tag{3.9}$$

Ce processus est connu sous le nom de *processus d'Ornstein–Uhlenbeck.*

Remarque 3.4. On définit de manière similaire la solution forte d'une EDS multidimensionnelle, c'est-à-dire qu'on peut supposer que $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x,t)$ prend des valeurs dans R^n, et, si B_t est un mouvement Brownien de dimension k, $g(x,t)$ prend des valeurs dans les matrices $n \times k$.

3.2 Semi-groupes et générateurs

Considérons l'EDS autonome

$$\mathrm{d}x_t = f(x_t)\,\mathrm{d}t + g(x_t)\,\mathrm{d}B_t, \tag{3.10}$$

admettant une solution forte $\{x_t\}_{t\geqslant 0}$ pour toute condition initiale $x \in \mathbb{R}$. On peut lui associer une famille à un paramètre $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ d'opérateurs linéaires, agissant sur les fonctions mesurables bornées $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, comme

$$T_t\varphi(x) = \mathbb{E}^x\bigl\{\varphi(x_t)\bigr\}. \tag{3.11}$$

L'homogénéité du temps et la propriété de Markov impliquent

$$T_s\bigl(T_t\varphi\bigr)(x) = \mathbb{E}^x\bigl\{\mathbb{E}^{x_s}\bigl\{\varphi(x_t)\bigr\}\bigr\} = \mathbb{E}^x\bigl\{\mathbb{E}^{s,x_s}\bigl\{\varphi(x_{t+s})\bigr\}\bigr\} = \mathbb{E}^x\bigl\{\varphi(x_{t+s})\bigr\} = T_{t+s}(x). \tag{3.12}$$

Par conséquent, $T_tT_s = T_{t+s}$, donc les opérateurs $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ forment un *semi-groupe*.

Les propriétés suivantes sont aisément vérifiées:

1. T_t préserve la fonction constante $1(x) \equiv 1$:

$$T_t1(x) = \mathbb{E}^x\bigl\{1(x_t)\bigr\} = 1 \quad \forall x. \tag{3.13}$$

2. T_t préserve l'ensemble des fonctions non-négatives:

$$\varphi(x) \geqslant 0\ \forall x \qquad \Rightarrow \qquad T_t\varphi(x) \geqslant 0\ \forall x. \tag{3.14}$$

3. T_t est une contraction par rapport à la norme sup:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\bigl|T_t\varphi(x)\bigr| = \sup_{x\in\mathbb{R}}\bigl|\mathbb{E}^x\bigl\{\varphi(x_t)\bigr\}\bigr| \leqslant \sup_{y\in\mathbb{R}}\bigl|\varphi(y)\bigr| \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}^x\bigl\{1(x_t)\bigr\} = \sup_{y\in\mathbb{R}}\bigl|\varphi(y)\bigr| \tag{3.15}$$

De plus, les T_t jouissent de la *propriété faible de Feller*, c'est-à-dire qu'ils préservent l'ensemble des fonctions bornées continues. Sous des conditions additionnelles, ils jouissent de la *propriété forte de Feller*, en transformant les fonctions mesurables bornées en fonctions continues bornées.

Le *générateur* du semi-groupe est l'opérateur linéraire défini par la limite

$$L\varphi(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{T_t\varphi(x) - \varphi(x)}{t}. \tag{3.16}$$

Son domaine est par définition l'ensemble des fonctions $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour lesquelles cette limite existe en tout point x.

Proposition 3.5. *Le générateur du semi-groupe est l'opérateur différentiel*

$$L = f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{2}g(x)^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}. \tag{3.17}$$

PREUVE: Par la formule d'Itô, appliquée à $u(t,x) = \varphi(x)$,

$$\begin{aligned} T_t\varphi(x) - \varphi(x) &= \mathbb{E}^x\bigl\{\varphi(x_t) - \varphi(x)\bigr\} \\ &= \mathbb{E}^x\biggl\{\int_0^t \Bigl(f(x_s)\varphi'(x_s) + \frac{1}{2}g(x_s)^2\varphi''(x_s)\Bigr)\,\mathrm{d}s + \int_0^t g(x_s)\varphi'(x_s)\,\mathrm{d}B_s\biggr\} \\ &= \mathbb{E}^x\biggl\{\int_0^t L\varphi(x_s)\,\mathrm{d}s\biggr\}, \end{aligned} \tag{3.18}$$

puisque l'espérance de l'intégrale stochastique est nulle. La dérivée en $t = 0$ de cette expression se réduit à $\mathbb{E}^x\bigl\{L\varphi(x_0)\bigr\} = L\varphi(x)$. □

Remarque 3.6. Dans le cas d'une EDS multidimensionnelle, le générateur est donné par l'opérateur différentiel

$$L = \sum_{i=1}^n f_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n d_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{3.19}$$

où les $d_{ij}(x)$ sont les éléments de matrice de $g(x)g(x)^T$.

Remarquons qu'il suit de la définition du générateur que la fonction $u(x,t) = T_t\varphi(x)$ satisfait l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = Lu(x,t), \tag{3.20}$$

appelée *équation de Kolmogorov rétrograde*. Sous des hypothèses de régularité appropriées, cette équation admet, pour toute condition initiale $u(x,0) = \delta(x-y)$, une solution particulière que nous noterons $p(y,t|x,0) = T_t\delta(x-y)$. Par linéarité, nous avons alors, pour tout Borélien $A \subset \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^x\bigl\{x_t \in A\bigr\} &= \mathbb{E}^x\bigl\{1_{\{x_t \in \mathcal{A}\}}\bigr\} \\ &= T_t 1_A(x) \\ &= T_t \int_{\mathbb{R}} 1_A(y)\delta(y-x)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} 1_A(y)p(y,t|x,0)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_A p(y,t|x,0)\,\mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{3.21}$$

ce qui veut dire que $p(y,t|x,0)$ est la densité de la probabilité de transition du processus de Markov $x_0 \mapsto x_t$.

Le semi-groupe $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ admet un *semi-groupe dual* $\{S_t\}_{t\geqslant 0}$, agissant sur les mesures σ-finies par

$$S_t\mu(A) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}^x\bigl\{x_t \in A\bigr\}\mu(\mathrm{d}x), \tag{3.22}$$

cette dernière quantité étant souvent dénotée $\mathbb{P}^\mu\bigl\{x_t \in A\bigr\}$. Son générateur est l'adjoint formel de L, défini par

$$\int_{\mathbb{R}} Lu(x)\mu(\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{R}} u(x)L^*\mu(\mathrm{d}x). \tag{3.23}$$

Ceci découle des égalités formelles

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S_t\mu(A) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}^x\bigl\{x_t \in A\bigr\}\mu(\mathrm{d}x) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathbb{R}} \int_A p(y,t|x,0)\,\mathrm{d}y\,\mu(\mathrm{d}x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_A Lp(y,t|x,0)\,\mathrm{d}y\,\mu(\mathrm{d}x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_A p(y,t|x,0)\,\mathrm{d}y\,L^*\mu(\mathrm{d}x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}^x\bigl\{x_t \in A\bigr\}L^*\mu(\mathrm{d}x) \\
&= S_t(L^*\mu)(A). \qquad (3.24)
\end{aligned}
$$

Si la mesure μ admet une densité ρ, c'est-à-dire $\mu(\mathrm{d}x) = \rho(x)\,\mathrm{d}x$, deux intégrations par partie montrent que L^* est l'opérateur différentiel

$$
L^*\rho(x) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bigl(f(x)\rho(x)\bigr) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\bigl(g(x)^2\rho(x)\bigr). \qquad (3.25)
$$

La densité au temps t, $\rho(y,t) = S_t\rho(y) = \int_{\mathbb{R}} p(y,t|x,0)\rho(x)\,\mathrm{d}x$, satisfait l'*équation de Kolmogorov progressive* ou *équation de Fokker–Planck*

$$
\frac{\partial}{\partial t}\rho(y,t) = L^*\rho(y,t), \qquad (3.26)
$$

et il en est de même des densités de transition $(y,t) \mapsto p(y,t|x,0)$.

Si le processus admet une *densité invariante* ρ_0, elle doit être solution de l'équation $L^*\rho_0 = 0$.

3.3 Exemples

Exemple 3.7. Le générateur du mouvement Brownien B_t est l'opérateur auto-adjoint $L = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$. Ses densités de transition $p(y,t|x,0)$ sont les densités Gaussiennes

$$
p(y,t|x,0) = \frac{\mathrm{e}^{-(y-x)^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}}. \qquad (3.27)
$$

Il n'y a pas de densité invariante. Le générateur du mouvement Brownien multidimensionnel est $L = \frac{1}{2}\Delta$.

Exemple 3.8. Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck de l'exemple 3.3 admet, pour $\gamma = 1$, les générateurs

$$
L = -x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \qquad \text{et} \qquad L^* = \Bigl(1 + x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Bigr) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}. \qquad (3.28)
$$

Sa densité invariante est gaussienne, de la forme

$$
\rho_0(x) = \mathit{const}\ \mathrm{e}^{-x^2}. \qquad (3.29)
$$

Par ailleurs, la substitution $\rho(x) = \psi(x)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ donne

$$
L^*\rho(x) = \frac{1}{2}\Bigl[(1-x^2) + \frac{\psi''(x)}{\psi(x)}\Bigr]\rho(x). \qquad (3.30)
$$

Par conséquent, l'équation aux valeurs propres $L^*\rho(x) = \lambda\rho(x)$ est satisfaite si et seulement si ψ est solution de l'équation

$$-\frac{1}{2}\psi''(x) + \frac{x^2}{2}\psi(x) = \Big(\frac{1}{2} - \lambda\Big)\psi(x), \tag{3.31}$$

qui est l'équation de Schrödinger stationnaire de l'oscillateur harmonique quantique. On sait que ses valeurs propres sont les demi-entiers positifs, ce qui permet de conclure que les valeurs propres de L^* sont les entiers non-positifs. Par conséquent, si

$$\rho(x,0) = \sum_{k\geqslant 0} c_k \rho_k(x) \tag{3.32}$$

est la décomposition de la densité initiale sur la base des fonctions propres de L^* (c'est-à-dire $L^*\rho_k(x) = -k\rho_k(x)$), on a

$$\rho(x,t) = \sum_{k\geqslant 0} c_k \,\mathrm{e}^{-kt}\, \rho_k(x) \tag{3.33}$$

Ceci implique la convergence exponentiellement rapide de toute densité initiale vers la densité invariante.

Exemple 3.9. Plus généralement, un système gradient de la forme

$$\mathrm{d}x_t = -\nabla U(x_t)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}B_t \tag{3.34}$$

admet une densité invariante proportionnelle à $\mathrm{e}^{-2U(x)/\sigma^2}$, pourvu que $U(x)$ croisse suffisamment vite à l'infini. Si σ est petit, cette densité est fortement concentrée autour des minima du potentiel $U(x)$.

Considérons le cas du potentiel à double puits

$$U(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2, \tag{3.35}$$

associé à l'EDS

$$\mathrm{d}x_t = \big(x_t - x_t^3\big)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}B_t. \tag{3.36}$$

La densité invariante $\rho_0(x)$ est maximale au fond des puits, en $x = \pm 1$, et correspond à la valeur propre 0 du générateur. On peut montrer que le spectre est purement ponctuel, et consiste en une valeur propre $-\lambda_1$ très proche de 0, d'ordre $\mathrm{e}^{-2(U(1)-U(0))/\sigma^2}$, et une infinité de valeurs propres toutes plus petites qu'une constante négative $-a$ indépendante de σ. La fonction propre associée à $-\lambda_1$ est impaire, avec des extrêma en ± 1, et telle que $\rho_0(x) \simeq |\rho_1(x)|$. La densité du processus évolue selon

$$\rho(x,t) = \sum_{k\geqslant 0} c_k \,\mathrm{e}^{-\lambda_k t}\, \rho_k(x) = c_0\rho_0(x) + c_1\,\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\,\rho_1(x) + \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-at}). \tag{3.37}$$

Si la condition initiale est concentrée dans le puits de gauche, on aura $c_0 \simeq c_1$, et la densité reste concentrée dans ce puits pendant un temps très long, d'ordre $1/\lambda_1$, avant d'approcher ρ_0. C'est ce qu'on appelle un phénomène de *métastabilité*.

La théorie des grandes déviations permet de préciser ces résultats, en caractérisant notamment l'espérance du temps nécessaire à aller d'un puits à l'autre, qui est aussi d'ordre $1/\lambda_1$.

Bibliographie

[Fri75] Avner Friedman, *Stochastic differential equations and applications. Vol. 1*, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1975, Probability and Mathematical Statistics, Vol. 28.

[GS72] Ĭ. Ī. Gīhman and A. V. Skorohod, *Stochastic differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1972, Translated from the Russian by Kenneth Wickwire, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 72.

[McK69] H. P. McKean, Jr., *Stochastic integrals*, Probability and Mathematical Statistics, No. 5, Academic Press, New York, 1969.

[Øks95] Bernt Øksendal, *Stochastic differential equations*, fourth ed., Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1995, An introduction with applications.

[Res92] Sidney Resnick, *Adventures in stochastic processes*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992.

Nils Berglund
FRUMAM, CPT–CNRS Luminy
Case 907, 13288 Marseille Cedex 9, France
et
PHYMAT, Université de Toulon
E-mail address: berglund@cpt.univ-mrs.fr