# TD Master 2 – Martingales et calcul stochastique

## Corrigé des exercices du chapitre 9 – Equations différentielles stochastiques

### Exercice 9.1

*On considère l'équation*

$$\mathrm{d}X_t = a(t)X_t\,\mathrm{d}t + b(t)\,\mathrm{d}t + c(t)\,\mathrm{d}B_t\ ,$$

*où $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ sont des processus adaptés.*

*Résoudre cette équation par la méthode de la variation de la constante, c'est-à-dire*

1. *Soit $\alpha(t) = \int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s$. Vérifier que $X_0\,\mathrm{e}^{\alpha(t)}$ est la solution de l'équation homogène, c-à-d avec $b = c = 0$.*
2. *Poser $Y_t = \mathrm{e}^{-\alpha(t)}\,X_t$ et calculer $\mathrm{d}Y_t$ à l'aide de la formule d'Itô.*

$$\begin{aligned}\mathrm{d}Y_t &= -a(t)\,\mathrm{e}^{-\alpha(t)}\,X_t\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-\alpha(t)}\,\mathrm{d}X_t \\ &= \mathrm{e}^{-\alpha(t)}\,b(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-\alpha(t)}\,c(t)\,\mathrm{d}B_t\ .\end{aligned}$$

3. *En déduire $Y_t$ puis $X_t$ sous forme intégrale.*

   En intégrant, il vient

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha(s)}\,b(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha(s)}\,c(s)\,\mathrm{d}B_s\ ,$$

   puis, comme $X_0 = Y_0$,

$$X_t = X_0\,\mathrm{e}^{\alpha(t)} + \int_0^t \mathrm{e}^{\alpha(t)-\alpha(s)}\,b(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \mathrm{e}^{\alpha(t)-\alpha(s)}\,c(s)\,\mathrm{d}B_s\ .$$

4. *Résoudre l'EDS*

$$\mathrm{d}X_t = -\frac{1}{1+t}X_t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}B_t\ , \qquad X_0 = 0\ .$$

   Dans ce cas, $\alpha(t) = -\log(1+t)$, donc $\mathrm{e}^{\alpha(t)} = (1+t)^{-1}$ et

$$X_t = \int_0^t \frac{1+s}{1+t}\frac{1}{1+s}\,\mathrm{d}B_s = \frac{B_t}{1+t}\ .$$

### Exercice 9.2

*Résoudre l'EDS*

$$\mathrm{d}X_t = -\frac{1}{2}X_t\,\mathrm{d}t + \sqrt{1-X_t^2}\,\mathrm{d}B_t\ , \qquad X_0 = 0$$

*à l'aide du changement de variable $Y = \arcsin(X)$.*

La formule d'Itô donne

$$\mathrm{d}Y_t = \frac{\mathrm{d}X_t}{\sqrt{1-X_t^2}} + \frac{1}{2}\frac{X_t}{(1-X_t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}X_t^2 = \mathrm{d}B_t\ .$$

Par conséquent, $X_t = \sin(B_t)$ pour tous les $t \leqslant \inf\{s > 0 \colon |B_s| = \frac{\pi}{2}\}$.

**Exercice 9.3**

1. *En utilisant l'exercice 9.1, résoudre l'EDS:*

$$\mathrm{d}X_t = \frac{b - X_t}{1-t}\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t\ , \qquad 0 \leqslant t < 1\ , \quad X_0 = a\ .$$

   Avec $\alpha(t) = \log(1-t)$, il vient

$$X_t = a(1-t) + bt + (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s}\,\mathrm{d}B_s\ .$$

2. *Déterminer la variance de $X_t$. Calculer $\lim_{t\to 1_-} X_t$ dans $L^2$.*

   Par l'isométrie d'Itô,

$$\operatorname{Var}(X_t) = (1-t)^2\int_0^t \frac{1}{(1-s)^2}\,\mathrm{d}s = (1-t)^2\left[\frac{1}{1-t} - 1\right] = t(1-t)\ .$$

   Par conséquent, $\operatorname{Var}(X_t - b) \to 0$ lorsque $t \to 1_-$, donc $X_t \to b$ dans $L^2$ lorsque $t \to 1_-$.

3. *Soit $M_t = \int_0^t (1-s)^{-1}\,\mathrm{d}B_s$. Montrer que*

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{1-2^{-n}\leqslant t\leqslant 1-2^{-n-1}} (1-t)|M_t| > \varepsilon\right\} \leqslant \frac{2}{\varepsilon^2 2^n}\ .$$

   *A l'aide du lemme de Borel–Cantelli, en déduire $\lim_{t\to 1_-} X_t$ au sens presque sûr.*

   Comme $M_t$ est une martingale, $M_t^2$ est une sous-martingale, et l'inégalité de Doob nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left\{\sup_{1-2^{-n}\leqslant t\leqslant 1-2^{-n-1}} (1-t)|M_t| > \varepsilon\right\} &\leqslant \mathbb{P}\left\{\sup_{1-2^{-n}\leqslant t\leqslant 1-2^{-n-1}} |M_t| > 2^n\varepsilon\right\} \\
&= \mathbb{P}\left\{\sup_{1-2^{-n}\leqslant t\leqslant 1-2^{-n-1}} M_t^2 > 2^{2n}\varepsilon^2\right\} \\
&\leqslant \frac{1}{\varepsilon^2 2^{2n}}\mathbb{E}\left(M^2_{1-2^{-n-1}}\right) \\
&\leqslant \frac{2}{\varepsilon^2 2^n}\ .
\end{aligned}$$

   Soit alors l'événement

$$A_n = \left\{\omega\colon \sup_{1-2^{-n}\leqslant t\leqslant 1-2^{-n-1}} (1-t)|M_t| > 2^{-n/4}\right\}\ .$$

   Nous avons $\mathbb{P}(A_n) \leqslant 2\cdot 2^{-n/2}$, qui est sommable. Le lemme de Borel–Cantelli montre alors que

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{1-2^{-n}\leqslant t\leqslant 1-2^{-n-1}} (1-t)|M_t| \leqslant 2^{-n/4}, n\to\infty\right\} = 1\ ,$$

   et donc que $(1-t)M_t \to 0$ presque sûrement lorsque $t \to 1_-$. Par conséquent, $X_t \to b$ presque sûrement lorsque $t \to 1_-$.

4. *Le processus $X_t$ est appelé un pont Brownien — expliquer pourquoi.*

   On a $X_0 = a$ et $X_1 = b$ presque sûrement. De plus, les incréments de $X_t$ sont indépendants et gaussiens. La seule différence par rapport au mouvement Brownien est que la variance de $X_t - X_s$ est donnée par $t(1-t) - s(1-s)$ au lieu de $t - s$.

**Exercice 9.4**

*On se donne $r, \alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle stochastique*

$$\mathrm{d}Y_t = r\,\mathrm{d}t + \alpha Y_t\,\mathrm{d}B_t\;, \qquad Y_0 = 1\;.$$

*Indication : Soit le "facteur intégrant"*

$$F_t = \exp\left\{-\alpha B_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t\right\}\;.$$

*Considérer $X_t = F_t Y_t$.*

En appliquant la formule d'Itô à $F_t = u(t, B_t)$ avec $u(t,x) = \mathrm{e}^{-\alpha x + \alpha^2 t/2}$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{d}F_t &= \frac{1}{2}\alpha^2 F_t\,\mathrm{d}t - \alpha F_t\,\mathrm{d}B_t + \frac{1}{2}\alpha^2 F_t\,\mathrm{d}B_t^2 \\ &= \alpha^2 F_t\,\mathrm{d}t - \alpha F_t\,\mathrm{d}B_t\;.\end{aligned}$$

Soit alors $X_t = F_t Y_t = u(F_t, Y_t)$. On applique maintenant la formule d'Itô à plusieurs variables, avec la fonction $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Cela nous donne

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X_t &= F_t\,\mathrm{d}Y_t + Y_t\,\mathrm{d}F_t + \mathrm{d}F_t\,\mathrm{d}Y_t \\ &= rF_t\,\mathrm{d}t + \alpha F_t Y_t\,\mathrm{d}B_t - \alpha F_t Y_t\,\mathrm{d}B_t + \alpha^2 F_t Y_t\,\mathrm{d}t - \alpha^2 F_t Y_t\,\mathrm{d}t \\ &= rF_t\,\mathrm{d}t\;.\end{aligned}$$

Comme $X_0 = F_0 Y_0 = 1$, on a donc

$$X_t = 1 + r\int_0^t F_s\,\mathrm{d}s\;,$$

et finalement

$$Y_t = F_t^{-1} X_t = \mathrm{e}^{\alpha B_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t} + r\int_0^t \mathrm{e}^{\alpha(B_t - B_s) - \frac{1}{2}\alpha^2(t-s)}\,\mathrm{d}s\;.$$