TD Master 2 – Martingales et calcul stochastique

Corrigé des exercices du chapitre 8 – Intégrale d'Itô

Exercice 8.1

On considère les deux processus stochastiques

$$X_t = \int_0^t \mathrm{e}^s \,\mathrm{d}B_s \;, \qquad Y_t = \mathrm{e}^{-t} X_t \;.$$

1. *Déterminer* $\mathbb{E}(X_t)$*,* $\mathrm{Var}(X_t)$*,* $\mathbb{E}(Y_t)$ *et* $\mathrm{Var}(Y_t)$*.*

   X_t étant l'intégrale d'un processus adapté, on a $\mathbb{E}(X_t) = 0$.
   Par conséquent, l'isométrie d'Itô donne $\mathrm{Var}(X_t) = \mathbb{E}(X_t^2) = \int_0^t \mathrm{e}^{2s} \,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}[\mathrm{e}^{2t} - 1]$.
   Enfin, par linéarité $\mathbb{E}(Y_t) = 0$ et par bilinéarité $\mathrm{Var}(Y_t) = \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{Var}(X_t) = \frac{1}{2}[1 - \mathrm{e}^{-2t}]$.

2. *Spécifier la loi de* X_t *et de* Y_t*.*

   Etant des intégrales stochastiques de fonctions déterministes, X_t et Y_t suivent des lois normales (centrées, de variance calculée ci-dessus).

3. *Montrer que* Y_t *converge en loi vers une variable* Y_∞ *lorsque* $t \to \infty$ *et spécifier sa loi.*

   La fonction caractéristique de Y_t est $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,uY_t}) = \mathrm{e}^{-u^2 \mathrm{Var}(Y_t)/2}$. Elle converge donc vers $\mathrm{e}^{-u^2/4}$ lorsque $t \to \infty$. Par conséquent, Y_t converge en loi vers une variable Y_∞, de loi normale centrée de variance 1/2.

4. *Exprimer* $\mathrm{d}Y_t$ *en fonction de* Y_t *et de* B_t*.*

   La formule d'Itô avec $u(t,x) = \mathrm{e}^{-t} x$ donne

   $$\mathrm{d}Y_t = -\,\mathrm{e}^{-t} X_t \,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}X_t = -Y_t \,\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t \;.$$

   Y_t est appelé *processus d'Ornstein–Uhlenbeck*.

Exercice 8.2

Soit

$$X_t = \int_0^t s \,\mathrm{d}B_s \;.$$

1. *Calculer* $\mathbb{E}(X_t)$ *et* $\mathrm{Var}(X_t)$*.*

   X_t étant l'intégrale d'un processus adapté, on a $\mathbb{E}(X_t) = 0$.
   Par conséquent, l'isométrie d'Itô donne $\mathrm{Var}(X_t) = \mathbb{E}(X_t^2) = \int_0^t s^2 \,\mathrm{d}s = \frac{1}{3}t^3$.

2. *Quelle est la loi de* X_t *?*

   X_t suit une loi normale centrée de variance $\frac{1}{3}t^3$.

3. *Calculer* $\mathrm{d}(tB_t)$ *à l'aide de la formule d'Itô.*

   La formule d'Itô avec $u(t,x) = tx$ donne $\mathrm{d}(tB_t) = B_t \,\mathrm{d}t + t \,\mathrm{d}B_t$.

4. *En déduire une relation entre* X_t *et*

   $$Y_t = \int_0^t B_s \,\mathrm{d}s \;.$$

Comme $B_s\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}(sB_s) - s\,\mathrm{d}B_s$, on a la formule d'intégration par parties

$$Y_t = \int_0^t \mathrm{d}(sB_s) - \int_0^t s\,\mathrm{d}B_s = tB_t - X_t\;.$$

Y_t suit donc une loi normale de moyenne nulle.

5. *Calculer la variance de* Y_t*,*

   (a) *directement à partir de sa définition;*

   Comme $\mathbb{E}\,(B_sB_u) = s \wedge u$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,(Y_t^2) &= \mathbb{E}\int_0^t\int_0^t B_sB_u\;\mathrm{d}s\,\mathrm{d}u = \int_0^t\int_0^t (s\wedge u)\;\mathrm{d}s\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^t \left[\int_0^u s\,\mathrm{d}s + \int_u^t u\,\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}u = \int_0^t \left[\frac{1}{2}u^2 + ut - u^2\right]\mathrm{d}u = \frac{1}{3}t^3\;.\end{aligned}$$

   (b) *en calculant d'abord la covariance de* B_t *et* X_t*, à l'aide d'une partition de* $[0,t]$*.*

   Pour calculer la covariance, on introduit une partition $\{t_k\}$ de $[0,t]$, d'espacement $1/n$. Alors

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(B_t,X_t) &= \mathbb{E}\,(B_tX_t) \\ &= \mathbb{E}\int_0^t sB_t\,\mathrm{d}B_s \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_k t_{k-1}\mathbb{E}\,(B_t(B_{t_k}-B_{t_{k-1}})) \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_k t_{k-1}(t_k - t_{k-1}) \\ &= \int_0^t s\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}t^2\;.\end{aligned}$$

   Il suit que

$$\mathrm{Var}(Y_t) = \mathrm{Var}(tB_t) + \mathrm{Var}(X_t) - 2\,\mathrm{cov}(tB_t,X_t) = t^3 + \frac{1}{3}t^3 - 2t\,\mathrm{cov}(B_t,X_t) = \frac{1}{3}t^3\;.$$

   En déduire la loi de Y_t*.*

   $Y_t = tB_t - X_t$ étant une combinaison linéaire de variables normales centrés, elle suit également une loi normale centrée, en l'occurrence de variance $t^3/3$. Remarquons que Y_t représente l'aire (signée) entre la trajectoire Brownienne et l'axe des abscisses.

Exercice 8.3

1. *Soit* Y *une variable aléatoire normale centrée, de variance* σ^2*. Montrer que*

$$\mathbb{E}\,(\mathrm{e}^Y) = \mathrm{e}^{\sigma^2/2}$$

   En complétant le carré ($y - y^2/2\sigma^2 = \sigma^2/2 - (y-\sigma^2)^2/2\sigma^2$), il vient

$$\mathbb{E}\,(\mathrm{e}^Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^y\,\frac{\mathrm{e}^{-y^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{\sigma^2/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-(y-\sigma^2)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{\sigma^2/2}\;.$$

2. *Soit B_t un mouvement Brownien standard, et $\varphi : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction indépendante de B_t. Pour $t \in [0,T]$ on pose*

$$X_t = \int_0^t \varphi(s) \, \mathrm{d}B_s$$

Calculer $\mathbb{E}(X_t)$ et $\operatorname{Var} X_t$. On précisera les hypothèses faites sur la fonction φ.

$\varphi(s)$ étant adapté, on a $\mathbb{E}(X_t) = 0$ pourvu que φ soit intégrable. L'isométrie d'Itô montre que

$$\operatorname{Var} X_t = \int_0^t \varphi(s)^2 \, \mathrm{d}s =: \Phi(t) ,$$

pourvu que φ soit de carré intégrable.

3. *Montrer que*

$$M_t = \exp\biggl\{X_t - \frac12 \int_0^t \varphi(s)^2 \, \mathrm{d}s\biggr\}$$

est une martingale.

Soit $t > s \geqslant 0$. La différence $X_t - X_s = \int_s^t \varphi(u) \, \mathrm{d}B_u$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$, et suit une loi normale centrée de variance $\Phi(t) - \Phi(s)$. Par conséquent,

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{X_t} | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{X_s} \mathrm{e}^{X_t - X_s} | \mathcal{F}_s) = \mathrm{e}^{X_s} \, \mathbb{E}(\mathrm{e}^{X_t - X_s}) = \mathrm{e}^{(\Phi(t) - \Phi(s))/2}$$

en vertu de 1., ce qui équivaut à la propriété de martingale pour M_t.

4. *Démontrer l'inégalité de Bernstein : Pour tout $\lambda > 0$,*

$$\mathbb{P}\Bigl\{\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} X_s > \lambda\Bigr\} \leqslant \exp\biggl\{-\frac{\lambda^2}{2\Phi(t)}\biggr\}$$

où $\Phi(t) = \displaystyle\int_0^t \varphi(s)^2 \, \mathrm{d}s$.

Soit $\gamma > 0$. En remplaçant φ par $\gamma\varphi$ dans la définition de X_t, on voit que

$$M_t^{(\gamma)} = \exp\biggl\{\gamma X_t - \frac{\gamma^2}{2} \int_0^t \varphi(s)^2 \, \mathrm{d}s\biggr\}$$

est également une martingale. Il suit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Bigl\{\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} X_s > \lambda\Bigr\} &= \mathbb{P}\Bigl\{\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \mathrm{e}^{\gamma X_s} > \mathrm{e}^{\gamma\lambda}\Bigr\} \\
&= \mathbb{P}\Bigl\{\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} M_s^{(\gamma)} \, \mathrm{e}^{\gamma^2 \Phi(s)/2} > \mathrm{e}^{\gamma\lambda}\Bigr\} \\
&\leqslant \mathbb{P}\Bigl\{\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} M_s^{(\gamma)} > \mathrm{e}^{\gamma\lambda - \gamma^2\Phi(t)/2}\Bigr\} \\
&\leqslant \mathrm{e}^{\gamma^2\Phi(t)/2 - \gamma\lambda} \, \mathbb{E}(M_t^{(\gamma)}) ,
\end{aligned}$$

la dernière inégalité découlant de l'inégalité de Doob. Comme $\mathbb{E}(M_t^{(\gamma)}) = 1$ par la propriété de martingale, le résultat suit en optimisant sur γ, c'est-à-dire en prenant $\gamma = \lambda/\Phi(t)$.

Exercice 8.4

Soit $\{B_t\}_{t\in[0,T]}$ *un mouvement Brownien standard. Soit* $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ *une partition de* $[0,T]$*, et soit*

$$e_t = \sum_{k=1}^{N} e_{t_{k-1}} 1_{[t_{k-1},t_k)}(t)$$

une fonction simple, adaptée à la filtration canonique du mouvement Brownien.

L'intégrale de Stratonovich de e_t *est définie par*

$$\int_0^T e_t \circ \mathrm{d}B_t = \sum_{k=1}^{N} \frac{e_{t_k} + e_{t_{k-1}}}{2} \Delta B_k \qquad \text{où } \Delta B_k = B_{t_k} - B_{t_{k-1}} \ .$$

L'intégrale de Stratonovich $\int_0^T X_t \circ \mathrm{d}B_t$ *d'un processus adapté* X_t *est définie comme la limite de la suite* $\int_0^T e_t^{(n)} \circ \mathrm{d}B_t$*, où* $e^{(n)}$ *est une suite de fonctions simples convergeant vers* X_t *dans* L^2*. On admettra que cette limite existe et est indépendante de la suite* $e^{(n)}$*.*

1. *Calculer*

$$\int_0^T B_t \circ \mathrm{d}B_t \ .$$

Soit $t_k = t_k(n) = k2^{-n}$ et $N = \lfloor 2^n T \rfloor$. Alors

$$\begin{aligned}
\int_0^T B_t \circ \mathrm{d}B_t &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{B_{t_k} + B_{t_{k-1}}}{2} \Delta B_k \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \bigl(B_{t_k}^2 + B_{t_{k-1}}^2\bigr) \\
&= \frac{1}{2} B_T^2 \ .
\end{aligned}$$

2. *Soit* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^2*, et soit* X_t *un processus adapté satisfaisant*

$$X_t = \int_0^t g(X_s) \circ \mathrm{d}B_s \qquad \forall t \in [0,T] \ .$$

Soit Y_t *l'intégrale d'Itô*

$$Y_t = \int_0^t g(X_s)\,\mathrm{d}B_s \ .$$

Montrer que

$$X_t - Y_t = \frac{1}{2} \int_0^t g'(X_s) g(X_s)\,\mathrm{d}s \qquad \forall t \in [0,T] \ .$$

On choisit une partition $t_k(n)$ comme ci-dessus. Alors les processus

$$\begin{aligned}
X_t^{(n)} &= \sum_{k=1}^{N} \frac{g(X_{t_k}) + g(X_{t_{k-1}})}{2} \Delta B_k \\
Y_t^{(n)} &= \sum_{k=1}^{N} g(X_{t_{k-1}}) \Delta B_k
\end{aligned}$$

avec $N = N(t)$ correspondant à l'intervalle de la partition contenant t, convergent respectivement vers X_t et Y_t lorsque $n \to \infty$. Leur différence s'écrit

$$X_t^{(n)} - Y_t^{(n)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \bigl[g(X_{t_k}) - g(X_{t_{k-1}})\bigr] \Delta B_k \;.$$

La formule de Taylor implique

$$g(X_{t_k}) - g(X_{t_{k-1}}) = g'(X_{t_{k-1}})(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) + \mathcal{O}(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) \;.$$

Or

$$\begin{aligned} X_{t_k} - X_{t_{k-1}} &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} g(X_s) \circ \mathrm{d}B_s \\ &= g(X_{t_{k-1}})\Delta B_k + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \bigl[g(X_s) - g(X_{t_{k-1}})\bigr] \circ \mathrm{d}B_s \\ &= g(X_{t_{k-1}})\Delta B_k + \mathcal{O}(t_k - t_{k-1}) \;. \end{aligned}$$

On en conclut que

$$g(X_{t_k}) - g(X_{t_{k-1}}) = g'(X_{t_{k-1}})g(X_{t_{k-1}})\Delta B_k + \mathcal{O}(\Delta B_k) + \mathcal{O}(t_k - t_{k-1}) \;.$$

En substituant dans l'expression de $X_t^{(n)} - Y_t^{(n)}$, on obtient donc

$$X_t^{(n)} - Y_t^{(n)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \bigl[g'(X_{t_{k-1}})g(X_{t_{k-1}})\Delta B_k^2 + \mathcal{O}(\Delta B_k^2) + \mathcal{O}((t_k - t_{k-1})\Delta B_k)\bigr] \;.$$

En procédant comme dans la preuve de la formule d'Itô, on peut remplacer ΔB_k^2 par Δt_k, et il suit

$$\lim_{n\to\infty} \bigl[X_t^{(n)} - Y_t^{(n)}\bigr] = \frac{1}{2} \int_0^t g'(X_s)g(X_s) \,\mathrm{d}s \;.$$