TD Master 2 – Martingales et calcul stochastique

Corrigé des exercices du chapitre 7 – Mouvement Brownien

Exercice 7.1

Montrer que pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$, le processus $X_t = \mathrm{e}^{-\gamma^2 t/2}\cosh(\gamma B_t)$ est une martingale.

Pour $t > s \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\cosh(\gamma B_t)|\mathcal{F}_s\right) &= \frac{\mathrm{e}^{\gamma B_s}}{2}\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\gamma(B_t-B_s)}|\mathcal{F}_s\right) + \frac{\mathrm{e}^{-\gamma B_s}}{2}\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\gamma(B_t-B_s)}|\mathcal{F}_s\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\gamma B_s}}{2}\,\mathrm{e}^{\gamma^2(t-s)/2} + \frac{\mathrm{e}^{-\gamma B_s}}{2}\,\mathrm{e}^{\gamma^2(t-s)/2} \\
&= \cosh(\gamma B_s)\,\mathrm{e}^{\gamma^2(t-s)/2}\ .
\end{aligned}$$

En déduire une autre preuve du fait que $\tau = \inf\{t \geqslant 0\colon B_t \notin (-a,a)\}$ satisfait

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\right) = \frac{1}{\cosh(a\sqrt{2\lambda})}\ .$$

On a $1 = \mathbb{E}\left(X_{t\wedge\tau}\right)$. Faisant tendre t vers l'infini, on obtient par le théorème de convergence dominée $1 = \mathbb{E}\left(X_\tau\right) = \cosh(\gamma a)\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\gamma^2\tau/2}\right)$. Il suffit alors de prendre $\gamma = \sqrt{2\lambda}$.

Exercice 7.2

1. *Montrer que si $X_t = f(B_t,t,\gamma)$ est une martingale, alors (sous des conditions de régularité qu'on précisera) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\gamma}f(B_t,t,\gamma)$ est également une martingale.*

   X_t étant une martingale, $\mathbb{E}\left(|X_t|\right) < \infty$. Pour tout $A \in \mathcal{F}_s$, on a

   $$\mathbb{E}\left(X_t 1_A\right) = \mathbb{E}\left(X_s 1_A\right)\ .$$

   Si f est continûment différentiable en γ et $\mathbb{E}\left(|\partial_\gamma f(B_t,t,\gamma)|\right) < \infty$, on peut prendre la dérivée des deux côtés et permuter espérance et dérivée, ce qui montre le résultat.

2. *Soit $f(x,t,\gamma) = \mathrm{e}^{\gamma x - \gamma^2 t/2}$. Calculer le développement limité de f en $\gamma = 0$ jusqu'à l'ordre γ^4. En déduire deux nouvelles martingales dérivées du mouvement Brownien.*

   En développant l'exponentielle ou en calculant des dérivées successives, on trouve

   $$f(x,t,\gamma) = 1 + \gamma x + \frac{\gamma^2}{2!}(x^2-t) + \frac{\gamma^3}{3!}(x^3-3tx) + \frac{\gamma^4}{4!}(x^4-6tx^2+3t^2) + \mathcal{O}(\gamma^5)\ .$$

   On retrouve le fait que B_t et $B_t^2 - t$ sont des martingales, mais on trouve aussi deux nouvelles martingales: $B_t^3 - 3tB_t$ et $B_t^4 - 6tB_t^2 + 3t^2$.

3. *Soit $\tau = \inf\{t \geqslant 0\colon B_t \notin (-a,a)\}$. Calculer $\mathbb{E}\left(\tau^2\right)$ à l'aide du résultat précédent.*

   On a $\mathbb{E}\left(B_{t\wedge\tau}^4 - 6(t\wedge\tau)B_{t\wedge\tau}^2\right) = -3\mathbb{E}\left((t\wedge\tau)^2\right)$. Nous avons déjà établi que $\mathbb{E}\left(\tau\right) = a^2 < \infty$. Lorsque t tend vers l'infini, $\mathbb{E}\left((t\wedge\tau)^2\right)$ tend vers $\mathbb{E}\left(\tau^2\right)$ par le théorème de convergence monotone. D'autre part, par le théorème de convergence dominée, $\mathbb{E}\left(B_{t\wedge\tau}^4 - 6(t\wedge\tau)B_{t\wedge\tau}^2\right)$ tend vers $\mathbb{E}\left(B_\tau^4 - 6\tau B_\tau^2\right) = a^4 - 6a^2\mathbb{E}\left(\tau\right) = -5a^4$. Ainsi,

   $$\mathbb{E}\left(\tau^2\right) = \frac{5}{3}a^4\ .$$

Exercice 7.3

Pour $a, b > 0$, on pose $X_t = B_t - bt$ et $\tau = \inf\{t \geqslant 0 \colon X_t = a\}$.

1. *En utilisant la martingale $\mathrm{e}^{\gamma B_t - \gamma^2 t^2/2}$, où γ est la solution positive de $\gamma^2 - 2b\gamma - 2\lambda = 0$, calculer*
$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\, 1_{\{\tau<\infty\}}\right) .$$

   Soit la martingale $M_t = \mathrm{e}^{\gamma B_t - \gamma^2 t^2/2} = \mathrm{e}^{\gamma X_t - \lambda t}$. Dans ce cas, nous ne savons pas si le temps d'arrêt τ est borné. Mais la preuve de la Proposition 7.5.3 du polycopié peut être adaptée afin de montrer que
$$1 = \mathbb{E}\left(M_{t\wedge\tau} 1_{\{\tau<\infty\}}\right) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\gamma X_{t\wedge\tau} - \lambda(t\wedge\tau)}\, 1_{\{\tau<\infty\}}\right) .$$

   Faisant tendre t vers l'infini, on obtient
$$1 = \mathbb{E}\left(M_\tau 1_{\{\tau<\infty\}}\right) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\gamma X_\tau - \lambda\tau}\, 1_{\{\tau<\infty\}}\right) = \mathrm{e}^{\gamma a}\, \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\, 1_{\{\tau<\infty\}}\right) ,$$

   et donc
$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\, 1_{\{\tau<\infty\}}\right) = \mathrm{e}^{-\gamma a} = \mathrm{e}^{-a(b+\sqrt{b^2+2\lambda})} .$$

2. *Particulariser au cas $b = 0$.*

   On a $\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\, 1_{\{\tau<\infty\}}\right) = \mathrm{e}^{-a\sqrt{2\lambda}}$.
   En particulier, prenant $\lambda = 0$, on obtient $\mathbb{P}\{\tau < \infty\} = 1$. Donc en fait $\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\right) = \mathrm{e}^{-a\sqrt{2\lambda}}$. Remarquons toutefois qu'en prenant la dérivée par rapport à λ, on voit que $\mathbb{E}(\tau) = \lim_{\lambda\to0+} \mathbb{E}\left(\tau\, \mathrm{e}^{-\lambda\tau}\right) = -\lim_{\lambda\to0+} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \mathrm{e}^{-a\sqrt{2\lambda}} = +\infty$. Cela est lié au fait que, comme la marche aléatoire, le mouvement Brownien est récurrent nul.

3. *Soit $b > 0$. En choisissant une valeur convenable de λ, déterminer $\mathbb{P}\{\tau < \infty\}$.*

   Prenant $\lambda = 0$, on obtient $\mathbb{P}\{\tau < \infty\} = \mathrm{e}^{-ab}$. Le mouvement Brownien a donc une probabilité $1 - \mathrm{e}^{-ab}$ de ne jamais atteindre la droite $x = a + bt$.