TD Master 2 – Martingales et calcul stochastique

Corrigé des exercices du chapitre 6 – Théorèmes de convergence

Exercice 6.1

On considère le processus de Galton–Watson Z_n introduit dans l'exercice 4.4.

1. *Montrer que $X_n = Z_n/\mu^n$ converge dans L^2 vers une variable aléatoire X d'espérance égale à 1.*

   Nous avons montré précédemment que

$$\mathbb{E}\left(\langle X\rangle_\infty\right) = \sigma^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}\left(X_{m-1}\right)}{\mu^{m+1}} = \sigma^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^{m+1}} = \frac{\sigma^2}{\mu(\mu-1)} < \infty\ .$$

   Par la proposition 6.3.2 du cours, $\mathbb{E}\left(X_n^2\right)$ est uniformément bornée, donc X_n converge dans L^2 vers une variable aléatoire X. Comme X_n converge à fortiori dans L^1, on a $\mathbb{E}\left(X\right) = 1$, et également $\mathbb{P}\left\{X > 0\right\} = 1 - \rho$.

2. *On suppose $p_0 > 0$. A l'aide de la loi $0-1$ de Lévy, montrer que Z_n converge presque sûrement vers une variable aléatoire $Z_\infty : \Omega \to \{0, +\infty\}$.*
   Indications : *Soit $A = \{\lim_{n\to\infty} Z_n < \infty\}$ et $B = \{\exists n \colon Z_n = 0\}$. Montrer que dans A, on a $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(1_B|\mathcal{F}_n\right) = 1_B$, et en déduire que $A \subset B$. Conclure en établissant que que $Z_\infty = \infty$ dans A^c et $Z_\infty = 0$ dans B.*

   S'il y a Z_n individus au temps n, alors $Z_{n+1} = 0$ si et seulement si chacun des Z_n individus n'a aucun descendant, ce qui arrive avec probabilité $p_0^{Z_n}$. Ceci montre que $\mathbb{E}\left(1_{\{Z_{n+1}=0\}}|\mathcal{F}_n\right) = p_0^{Z_n}$, et donc que $\mathbb{E}\left(1_B|\mathcal{F}_n\right) \geqslant p_0^{Z_n}$. Or si $\omega \in A$, alors il existe $L = L(\omega)$ tel que $Z_n(\omega) \leqslant L(\omega)$ pour tout n. Il suit que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(1_B|\mathcal{F}_n\right)(\omega) \geqslant p_0^L$ pour ces ω. Mais par la loi 0–1 de Lévy, cette limite vaut $1_B(\omega)$. Par conséquent, $1_B(\omega) = 1$ pour tout $\omega \in A$, ou encore $A \subset B$.
   D'une part, par définition, $Z_\infty = \infty$ dans A^c. D'autre part, $B \subset \{\lim_{n\to\infty} Z_n = 0\}$ et donc $Z_\infty = 0$ dans B. Ceci montre qu'en fait $A = B = \{Z_\infty = 0\}$ et $A^c = \{Z_\infty = \infty\}$.

Exercice 6.2

Un joueur dispose initialement de la somme $X_0 = 1$. Il joue à un jeu de hasard, dans lequel il mise à chaque tour une proportion λ de son capital, avec $0 < \lambda \leqslant 1$. Il a une chance sur deux de gagner le double de sa mise, sinon il perd sa mise.

L'évolution du capital X_n en fonction du temps n est décrite par

$$X_{n+1} = (1-\lambda)X_n + \lambda X_n \xi_n \qquad (n \geqslant 0)$$

où les ξ_n sont i.i.d., avec $\mathbb{P}\{\xi_n = 2\} = \mathbb{P}\{\xi_n = 0\} = 1/2$.

1. *Montrer que X_n est une martingale.*

   Par construction, ξ_n est indépendant de $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_0, \dots, \xi_{n-1})$. Par conséquent $\mathbb{E}\left(\xi_n|\mathcal{F}_n\right) = \mathbb{E}\left(\xi_n\right) = 1$, et il suit que $\mathbb{E}\left(X_{n+1}|\mathcal{F}_n\right) = (1-\lambda)X_n + \lambda X_n = X_n$.

2. *Calculer $\mathbb{E}\left(X_n\right)$.*

   Comme X_n est une martingale, $\mathbb{E}\left(X_n\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X_n|\mathcal{F}_0\right)\right) = \mathbb{E}\left(X_0\right) = 1$.

3. *Discuter la convergence presque sûre de X_n lorsque $n \to \infty$.*

   X_n étant une surmartingale positive (donc $-X_n$ une sous-martingale bornée supérieurement), elle converge presque sûrement vers une variable aléatoire intégrable X.

4. *Calculer $\mathbb{E}(X_n^2)$ par récurrence sur n.*

   Comme ξ_n est indépendante de $\mathcal{F}_n$, avec $\mathbb{E}(\xi_n) = 1$ et $\mathbb{E}(\xi_n^2) = 2$, on obtient $\mathbb{E}(X_{n+1}^2) = (1+\lambda^2)\mathbb{E}(X_n^2)$ donc $\mathbb{E}(X_n^2) = (1+\lambda^2)^n$.

5. *Que peut-on en déduire sur la convergence dans L^2 de X_n?*

   La suite $\mathbb{E}(X_n^2)$ diverge, donc la suite des X_n ne converge pas dans L^2.

6. *Déterminer le processus croissant $\langle X\rangle_n$.*

   On a $\mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)^2|\mathcal{F}_n) = \lambda^2 X_n^2 \mathbb{E}((\xi_n - 1)^2) = \lambda^2 X_n^2$, d'où

$$\langle X\rangle_n = \sum_{m=0}^{n-1} \mathbb{E}\big((X_{m+1} - X_m)^2 \bigm| \mathcal{F}_m\big) = \lambda^2 \sum_{m=0}^{n-1} X_m^2 \;.$$

7. *On suppose que le joueur mise à chaque tour la totalité de son capital, c'est-à-dire $\lambda = 1$.*

   (a) *Calculer explicitement la loi de X_n.*

   Comme $X_{n+1} = X_n\xi_n$, on vérifie par récurrence que $X_n(\Omega) = \{0, 2^n\}$ avec

$$\mathbb{P}\{X_n = 2^n\} = \frac{1}{2^n}\;,$$
$$\mathbb{P}\{X_n = 0\} = 1 - \frac{1}{2^n}\;.$$

   (b) *Déterminer la limite presque sûre de X_n.*

   Comme $\mathbb{P}\{X_n = 0\} \to 1$ lorsque $n \to \infty$ et $X_n(\omega) = 0$ implique $X_m(\omega) = 0$ pour tout $m \geqslant n$, X_n converge presque sûrement vers $X = 0$.

   (c) *Discuter la convergence de X_n dans L^1.*
   Les X_n sont-ils uniformément intégrables?

   On a $\mathbb{E}(|X_n - X|) = \mathbb{E}(|X_n|) = \mathbb{E}(X_n) = 1$ pour tout n, donc X_n ne converge pas dans L^1. Les X_n ne peuvent donc pas être uniformément intégrables.
   On peut aussi le voir directement à partir de la définition d'intégrabilité uniforme : on a

$$\mathbb{E}\big(|X_n| 1_{\{X_n > M\}}\big) = 2^n \mathbb{P}\big\{X_n > M\big\} = \begin{cases} 1 & \text{si } 2^n > M\;, \\ 0 & \text{sinon}\;. \end{cases}$$

   Par conséquent, $\sup_n \mathbb{E}\big(|X_n| 1_{\{X_n > M\}}\big) = 1$ pour tout M.

   (d) *Commenter ces résultats - est-ce que vous joueriez à ce jeu?*

   C'est à vous de voir — sachant que vous allez perdre votre mise presque sûrement. Toutefois, il y a une probabilité non nulle de gagner beaucoup d'argent après tout nombre fini de tours.

Exercice 6.2

Un joueur mise sur les résultats des jets indépendants d'une pièce équilibrée. A chaque tour, il mise une somme $S \geqslant 0$. Si la pièce tombe sur Pile, son capital augmente de S, si elle tombe sur Face, le joueur perd sa mise et donc son capital diminue de S.

Une stratégie populaire en France au XVIIIe siècle est appelée La Martingale. *Elle est définie comme suit:*

- *le joueur s'arrête de jouer dès qu'il a gagné la première fois (dès le premier Pile);*
- *il double sa mise à chaque tour, c'est-à-dire qu'il mise la somme $S_n = 2^n$ au nième tour, tant qu'il n'a pas gagné.*

Soit Y_n le capital du joueur au temps n (après n jets de la pièce). On admettra que le capital initial est nul, et que le joueur a le droit de s'endetter d'une somme illimitée, c'est-à-dire que Y_n peut devenir arbitrairement négatif. Soit X_n le capital au temps n d'un joueur misant un Euro à chaque tour.

1. *Montrer que la stratégie est prévisible, et écrire Y_n sous la forme $Y_n = (H \cdot X)_n$ en fonction du processus $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$.*

   On a $Y_n = Y_{n-1} + H_n(X_n - X_{n-1})$ avec $H_n = 2^n 1_{\{X_1=-1,X_2=-2,\dots,X_{n-1}=1-n\}}$ qui est clairement prévisible.

2. *Montrer que $\{Y_n\}_{n\geqslant 0}$ est une martingale.*

   $\mathbb{E}(Y_n|\mathcal{F}_{n-1}) = Y_{n-1} + H_n\mathbb{E}(X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) = Y_{n-1} + H_n\mathbb{E}(X_n - X_{n-1}) = Y_{n-1}$.

3. *Déterminer le processus croissant $\langle Y\rangle_n$. Calculer $\mathbb{E}(\langle Y\rangle_n)$ et discuter la convergence de Y_n dans L^2.*

   On a $\mathbb{E}((Y_n - Y_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}) = H_n^2$ donc $\langle Y\rangle_n = \sum_{m=1}^n H_m^2$.
   Comme $\mathbb{E}(H_m^2) = 2^{2m}\mathbb{P}\{X_1 = -1, X_2 = -2, \dots, X_{n-1} = 1-n\} = 2^{m+1}$, on obtient $\mathbb{E}(\langle Y\rangle_n) = \sum_{m=1}^n 2^{m+1} = 4(2^n - 1)$. Par conséquent, Y^n ne converge pas dans L^2.

4. *Déterminer l'image de Y_n, sa loi, et discuter la convergence presque sûre de Y_n. Quelle est sa limite?*

   Par inspection, on voit que Y_n prend les valeurs 1 et $1-2^n$, avec $\mathbb{P}\{Y_n = 1-2^n\} = 2^{-n}$ (si l'on a perdu n fois) et donc $\mathbb{P}\{Y_n = 1\} = 1 - 2^{-n}$.
   On observe que $\mathbb{E}(Y_n^+) \leqslant 2$ pour tout n, donc Y_n converge presque sûrement vers une variable Y_∞. L'expression de la loi de Y_n montre que $Y_\infty = 1$ presque sûrement, c'est-à-dire qu'on aura gagné un Euro avec probabilité 1.

5. *Y_n converge-t-elle dans L^1?*

   Non, car $\mathbb{E}(Y_n) = 0 \neq 1 = \mathbb{E}(Y_\infty)$.

On suppose maintenant que la banque n'admet pas que le joueur s'endette de plus qu'une valeur limite L (on pourra supposer que $L = 2^k$ pour un $k \geqslant 1$). Par conséquent, le joueur est obligé de s'arrêter dès que son capital au temps n est inférieur à $-L + 2^{n+1}$. Notons Z_n ce capital.

6. *Soit N la durée du jeu (le nombre de fois que le joueur mise une somme non nulle). Montrer que N est un temps d'arrêt et donner sa loi.*

   On a $N = \inf\{n \geqslant 1 \colon Z_n - 2^{n-1} < -L \text{ ou } Z_n = 1\}$. C'est un temps d'arrêt puisqu'il s'agit d'un temps de premier passage. Sa loi est donnée par $\mathbb{P}\{N = n\} = 2^{-n}$ pour $n = 1, \dots, k-1$ et $\mathbb{P}\{N = k\} = 2^{-(k-1)}$.

7. *Le processus Z_n est-il une martingale?*

   Oui car $Z_n = Y_{n\wedge N}$ est une martingale arrêtée.

8. *Discuter la convergence presque sûre et dans L^1 de Z_n et commenter les résultats.*

   Comme dans le cas de Y_n, Z_n est une martingale telle que $\mathbb{E}(Z_n^+)$ est bornée, donc elle converge vers une variable aléatoire Z_∞. On trouve $\mathbb{P}\{Z_\infty = 1\} = 1 - 2^{-k}$ et $\mathbb{P}\{Z_\infty = 1 - 2^k\} = 2^{-k}$. En particulier, $\mathbb{E}(Z_\infty) = 0 = \mathbb{E}(Z_n)$ donc Z_n converge dans L^1. Avec la contrainte de la banque, la grande probabilité de faire un petit gain est donc compensée par la petite probabilité de faire une grande perte!

Exercice 6.4

Soit $X_0 = 1$. On définit une suite $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ récursivement en posant que pour tout $n \geqslant 1$, X_n suit la loi uniforme sur $]0, 2X_{n-1}]$ (c-à-d $X_n = 2U_n X_{n-1}$ où les U_n sont i.i.d. de loi uniforme sur $]0, 1]$).

1. *Montrer que X_n est une martingale.*

   $\mathbb{E}\,(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}\,(2U_n X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) = 2X_{n-1}\mathbb{E}\,(U_n|\mathcal{F}_{n-1}) = 2X_{n-1}\mathbb{E}\,(U_n) = X_{n-1}$.

2. *Calculer le processus croissant $\langle X\rangle_n$ et discuter la convergence de X_n dans L^2.*

   On a
   $$\mathbb{E}\left(X_n^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \mathbb{E}\left(4U_n^2 X_{n-1}^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = 4X_{n-1}^2\mathbb{E}\left(U_n^2\right) = \frac{4}{3}X_{n-1}^2 \;.$$
   Par conséquent, le processus croissant est donné par
   $$\langle X\rangle_n = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_m^2 - X_{m-1}^2 \mid \mathcal{F}_{m-1}\right) = \frac{1}{3}\sum_{m=1}^{n} X_{m-1}^2 \;.$$
   Comme
   $$\mathbb{E}\left(\langle X\rangle_n\right) = \frac{1}{3}\sum_{m=1}^{n}\mathbb{E}\left(X_{m-1}^2\right) = \frac{1}{3}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{4}{3}\right)^{m-1} ,$$
   on a $\langle X\rangle_\infty = \infty$, donc la suite ne peut pas converger dans L^2 (on peut aussi observer directement que $\mathbb{E}\,(X_n^2)$ diverge).

3. *Discuter la convergence presque sûre de X_n.*

   X_n est une surmartingale positive, donc elle converge presque sûrement (on peut aussi observer que c'est une sous-martingale telle que $\mathbb{E}\,(X_n^+) = \mathbb{E}\,(X_n) = 1\ \forall n$).

4. *Déterminer la limite presque sûre de X_n.*
   Indication : Considérer $Y_n = \log(X_n)$ ainsi que $Z_n = Y_n - \mathbb{E}\,(Y_n)$.

   Comme $Y_n = Y_{n-1} + \log 2 + \log(U_n)$, on a
   $$\mathbb{E}\left(Y_n\right) = \mathbb{E}\left(Y_{n-1}\right) + \log 2 + \mathbb{E}\left(\log(U_n)\right) = \mathbb{E}\left(Y_{n-1}\right) - \left[1 - \log 2\right] ,$$
   et donc $\mathbb{E}\,(Y_n) = -n[1-\log 2]$ tend vers $-\infty$ lorsque $n\to\infty$. On peut donc s'attendre à ce que Y_n converge vers $-\infty$, donc que X_n converge vers 0 presque sûrement.
   Pour le montrer, nous devons contrôler les fluctuations de $Z_n = Y_n + n[1-\log 2]$. On peut l'écrire sous la forme
   $$Z_n = \sum_{k=1}^{n} V_k \qquad \text{où} \qquad V_k = 1 + \log(U_k) \;.$$
   Nous allons montrer que pour n assez grand, $Z_n \leqslant cn$ presque sûrement pour tout $c \in]0,1[$. En prenant $0 < c < 1 - \log 2$, cela montrera qu'en effet Y_n converge presque sûrement vers $-\infty$, et donc $X_n \to 0$ p.s.

   - Une première méthode consiste à écrire
     $$\mathbb{P}\left\{Z_n > cn\right\} = \mathbb{P}\left\{\mathrm{e}^{\gamma Z_n} > \mathrm{e}^{\gamma cn}\right\} \leqslant \mathrm{e}^{-\gamma cn}\,\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\gamma Z_n}\right) = \left[\mathrm{e}^{-\gamma c}\,\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\gamma V_1}\right)\right]^n .$$
     Comme $\mathrm{e}^{\gamma V_1} = \mathrm{e}^{\gamma}\,U_1^{\gamma}$, on a
     $$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\gamma V_1}\right) = \mathrm{e}^{\gamma}\int_0^1 x^{\gamma}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{\gamma}}{\gamma+1} \;.$$

Il suit donc que

$$\mathbb{P}\left\{Z_n > cn\right\} \leqslant \left[\frac{\mathrm{e}^{-\gamma(c-1)}}{\gamma+1}\right]^n$$

pour tout $\gamma > 0$. La meilleure borne est obtenue pour $\gamma = c/(1-c)$, et a la forme

$$\mathbb{P}\left\{Z_n > cn\right\} \leqslant \left[\mathrm{e}^c(1-c)\right]^n .$$

La série de terme général $[\mathrm{e}^c(1-c)]^n$ converge pour tout $c \in]0,1[$, donc le lemme de Borel–Cantelli montre que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{Z_n}{n} \leqslant c$$

presque sûrement. C'est le résultat cherché.

- Une seconde méthode de montrer que $Z_n \leqslant cn$ presque sûrement pour n assez grand consiste à écrire

$$\mathbb{P}\left\{|Z_n| > cn\right\} = \mathbb{P}\left\{Z_n^4 > (cn)^4\right\} \leqslant \frac{1}{(cn)^4}\mathbb{E}\left(Z_n^4\right) .$$

On a

$$Z_n^4 = \sum_{i,j,k,l=1}^n V_iV_jV_kV_l .$$

On trouve facilement les moments

$$\mathbb{E}\left(V_i\right) = 0 , \quad \mathbb{E}\left(V_i^2\right) = 1 , \quad \mathbb{E}\left(V_i^3\right) = -2 , \quad \mathbb{E}\left(V_i^4\right) = 9 .$$

Comme les V_i sont indépendants, les seuls termes contribuant à $\mathbb{E}\,(Z_n^4)$ sont ceux qui contiennent soit quatre indices identiques, soit deux paires d'indices identiques. Un peu de combinatoire nous fournit alors

$$\mathbb{E}\left(Z_n^4\right) = n\mathbb{E}\left(V_1^4\right) + \binom{4}{2}\frac{n(n-1)}{2}\mathbb{E}\left(V_1^2\right)^2 = 3n^2 + 6n .$$

Ceci implique

$$\mathbb{P}\left\{|Z_n| > cn\right\} \leqslant \frac{3}{c^4n^2} ,$$

et le lemme de Borel–Cantelli permet de conclure.

5. *Discuter la convergence de X_n dans L^1.*

Nous avons montré que $X_n \to 0$ presque sûrement. Par conséquent, nous avons aussi $X_n \to 0$ en probabilité. Comme par ailleurs, $\mathbb{E}\,(|X_n|) = 1$ pour tout n, le Théorème 6.4.3 du cours montre que X_n ne peut pas converger dans L^1.

Exercice 6.5

Soit U une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément lipschitzienne. Soit $I_{k,n} = [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[$ et soit $\mathcal{F}_n$ la tribu sur $\Omega = [0,1]$ engendrée par les $I_{k,n}$ pour $k = 0, \dots, 2^n-1$.

On pose

$$X_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{f((k+1)2^{-n}) - f(k2^{-n})}{2^{-n}} 1_{\{U\in I_{k,n}\}} .$$

1. *Montrer que X_n est une martingale par rapport à $\mathcal{F}_n$.*

   Commençons par montrer que les X_n sont intégrables. Si K dénote la constante de Lipschitz, on a $|f((k+1)2^{-n}) - f(k2^{-n})| \leqslant K2^{-n}$, d'où

   $$\mathbb{E}\big(|X_n|\big) \leqslant \sum_{k=0}^{2^n-1} K\,\mathbb{P}\big\{U \in I_{k,n}\big\} \leqslant K \ .$$

   Pour calculer les espérances conditionnelles, on observe que chaque intervalle $I_{\ell,n}$ est la réunion disjointe des deux intervalles $I_{2\ell,n+1}$ et $I_{2\ell+1,n+1}$ de même longueur. Par conséquent

   $$\mathbb{E}\big(1_{\{U\in I_{2\ell,n+1}\}} \bigm| \mathcal{F}_n\big) = \mathbb{E}\big(1_{\{U\in I_{2\ell+1,n+1}\}} \bigm| \mathcal{F}_n\big) = \frac{1}{2} 1_{\{U\in I_{\ell,n}\}} \ .$$

   En séparant les termes pairs et impairs, on a

   $$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(X_{n+1} \bigm| \mathcal{F}_n\big) &= \sum_{\ell=0}^{2^n-1}\bigg[\frac{f((2\ell+1)2^{-(n+1)}) - f(2\ell\, 2^{-(n+1)})}{2^{-(n+1)}}\mathbb{E}\big(1_{\{U\in I_{2\ell,n+1}\}} \bigm| \mathcal{F}_n\big) \\ &\qquad + \frac{f((2\ell+2)2^{-(n+1)}) - f((2\ell+1)\, 2^{-(n+1)})}{2^{-(n+1)}}\mathbb{E}\big(1_{\{U\in I_{2\ell+1,n+1}\}} \bigm| \mathcal{F}_n\big)\bigg] \\ &= \sum_{\ell=0}^{2^n-1} \frac{f((2\ell+2)2^{-(n+1)}) - f(2\ell\, 2^{-(n+1)})}{2^{-(n+1)}}\frac{1}{2}1_{\{U\in I_{\ell,n}\}} \\ &= \sum_{\ell=0}^{2^n-1} \frac{f((2\ell+2)2^{-n}) - f(2\ell\, 2^{-(n+1)})}{2^{-n}}1_{\{U\in I_{\ell,n}\}} \\ &= X_n \ .\end{aligned}$$

2. *Montrer que X_n converge presque sûrement. On note la limite X_∞.*

   On a $\mathbb{E}(X_n^+) \leqslant \mathbb{E}(|X_n|) \leqslant K$, donc X_n converge presque sûrement vers une variable aléatoire X_∞.

3. *Discuter la convergence de X_n dans L^1.*

   En bornant chaque fonction indicatrice par 1 et en utilisant à nouveau le caractère lipschitzien, on voit que $|X_n(\omega)|$ est borné par K pour tout ω. Par conséquent,

   $$1_{\{|X_n|>M\}} = 0 \qquad \text{pour } M > K \ ,$$

   donc les X_n sont uniformément intégrables. Il suit que X_n converge vers X_∞ dans L^1.

4. *Montrer que pour tout $0 \leqslant a < b \leqslant 1$,*

   $$\mathbb{E}\big(X_\infty 1_{\{U\in[a,b]\}}\big) = f(b) - f(a) \ .$$

   Pour tout n, on a

   $$\begin{aligned}X_n 1_{\{U\in[a,b]\}} &= \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{f((k+1)2^{-n}) - f(k2^{-n})}{2^{-n}} 1_{\{U\in I_{k,n}\cap[a,b]\}} \\ &= \sum_{k\colon I_{k,n}\cap[a,b]\neq\emptyset} \frac{f((k+1)2^{-n}) - f(k2^{-n})}{2^{-n}} 1_{\{U\in I_{k,n}\}} \ .\end{aligned}$$

Soient $k_-(n)$ et $k_+(n)$ le plus petit et le plus grand k tel que $I_{k,n} \cap [a,b] \neq \emptyset$. Prenant l'espérance, comme $\mathbb{P}\{U \in I_{k,n}\} = 2^{-n}$ on voit que

$$\mathbb{E}\left(X_n 1_{\{U \in [a,b]\}}\right) = f((k_+(n)+1)2^{-n}) - f(k_-(n)2^{-n}) .$$

Lorsque $n \to \infty$, on a $k_-(n)2^{-n} \to a$ et $(k_+(n)+1)2^{-n} \to b$.

5. *On suppose f de classe C^1. A l'aide de 4., expliciter $X_\infty(\omega)$ (si l'on note $U(\omega) = \omega$ pour tout $\omega \in \Omega$).*

D'une part,

$$\mathbb{E}\left(X_\infty 1_{\{U \in [a,b]\}}\right) = \int_0^1 X_\infty(\omega) 1_{\{\omega \in [a,b]\}} \,\mathrm{d}\omega = \int_a^b X_\infty(\omega) \,\mathrm{d}\omega .$$

D'autre part, par le théorème fondamental du calcul intégral,

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(\omega) \,\mathrm{d}\omega .$$

On en conclut que

$$X_\infty(\omega) = f'(\omega) .$$