TD Master 2 – Martingales et calcul stochastique

Corrigé des exercices du chapitre 5 – Temps d'arrêt

Exercice 5.1

Démontrer la Proposition 5.3.1 :

1. *Si N et M sont des temps d'arrêt, alors $N \wedge M$ et $N \vee M$ sont des temps d'arrêt.*

   La décomposition

$$\begin{aligned}\{N \wedge M = n\} &= \Big(\{N = n\} \cap \{M \geqslant n\}\Big) \bigcup \Big(\{N \geqslant n\} \cap \{M = n\}\Big) \\ &= \Big(\{N = n\} \cap \{M < n\}^c\Big) \bigcup \Big(\{N < n\}^c \cap \{M = n\}\Big)\end{aligned}$$

   montre que $\{N \wedge M = n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout n, et donc que $N \wedge M$ est un temps d'arrêt. De même, la décomposition

$$\{N \vee M = n\} = \Big(\{N = n\} \cap \{M \leqslant n\}\Big) \bigcup \Big(\{N \leqslant n\} \cap \{M = n\}\Big)$$

   montre que $\{N \vee M = n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout n, et donc que $N \vee M$ est un temps d'arrêt. **Remarque :** On peut également observer que N est un temps d'arrêt si et seulement si $\{N \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout n. Cela permet d'utiliser la décomposition

$$\{N \wedge M \leqslant n\} = \{N \leqslant n\} \cap \{M \leqslant n\}$$

   pour montrer que $N \wedge M$ est un temps d'arrêt.

2. *Si N_k, $k \in \mathbb{N}$, est une suite de temps d'arrêt telle que $N_k \nearrow N$, alors N est un temps d'arrêt.*

   Il suffit d'observer que le fait que $N_k \nearrow N$ implique

$$\{N \leqslant n\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{N_k \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n \;.$$

Exercice 5.2

Soient $\xi_1, \xi_2, \dots$ des variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbb{E}(\xi_m) = 0$, et soit la martingale $X_n = \sum_{m=1}^n \xi_m$. On se donne $\lambda > 0$, et soit

$$P_n(\lambda) = \mathbb{P}\Big\{\max_{1 \leqslant m \leqslant n} |X_m| \geqslant \lambda\Big\} \;.$$

1. *On suppose les ξ_m de variance finie. Donner une majoration de $P_n(\lambda)$ en appliquant l'inégalité de Doob à X_n^2.*

   Notons σ^2 la variance des ξ_m. X_n^2 étant une sous-martingale, on a

$$P_n(\lambda) = \mathbb{P}\Big\{\max_{1 \leqslant m \leqslant n} X_m^2 \geqslant \lambda^2\Big\} \leqslant \frac{1}{\lambda^2} \mathbb{E}(X_n^2) = \frac{n\sigma^2}{\lambda^2} \;.$$

2. *Améliorer la borne précédente en appliquant l'inégalité de Doob à $(X_n + c)^2$ et en optimisant sur c.*

   Pour tout $c > 0$, $(X_n + c)^2$ est une sous-martingale et on a ($x \mapsto (x + c)^2$ étant croissante sur $\mathbb{R}_+$)

   $$P_n(\lambda) = \mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant m\leqslant n}(X_m + c)^2 \geqslant (\lambda + c)^2\right\} \leqslant \frac{1}{(\lambda + c)^2}\mathbb{E}\left((X_n + c)^2\right) = \frac{n\sigma^2 + c^2}{(\lambda + c)^2}\ ,$$

   puisque $\mathbb{E}\left(X_n\right) = 0$. Cette borne est minimale pour $c = n\sigma^2/\lambda$, et donne

   $$P_n(\lambda) \leqslant \frac{n\sigma^2}{\lambda^2 + n\sigma^2}\ .$$

   Contrairement à la première borne, celle-ci est toujours inférieure à 1.

3. *On suppose que les ξ_m suivent une loi normale centrée réduite. Majorer $P_n(\lambda)$ en appliquant l'inégalité de Doob à $\mathrm{e}^{cX_n^2}$ et en optimisant sur c.*

   Pour tout $c > 0$, $\mathrm{e}^{cX_n^2}$ est une sous-martingale et on a

   $$P_n(\lambda) = \mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant m\leqslant n}\mathrm{e}^{cX_m^2} \geqslant \mathrm{e}^{c\lambda^2}\right\} \leqslant \mathrm{e}^{-c\lambda^2}\,\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{cX_n^2}\right)\ .$$

   Or comme X_n est normale centrée de variance n, on a

   $$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{cX_n^2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{cx^2}\,\frac{\mathrm{e}^{-x^2/2n}}{\sqrt{2\pi n}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{1 - 2nc}}\ ,$$

   et donc

   $$P_n(\lambda) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-c\lambda^2}}{\sqrt{1 - 2nc}}\ .$$

   Le meilleure borne est obtenue pour $2nc = 1 - n/\lambda^2$ et donne

   $$P_n(\lambda) \leqslant \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\,\mathrm{e}^{-(\lambda^2 - n)/2n}\ .$$

   Cette borne est utile lorsque $\lambda^2 \gg n$. Dans ce cas elle fournit une décroissance exponentielle en $\lambda^2/2n$.

4. *Pour des ξ_m normales centrées réduites, majorer $\mathbb{P}\{\max_{1\leqslant m\leqslant n} X_m \geqslant \lambda\}$ en appliquant l'inégalité de Doob à e^{cX_n} et en optimisant sur c.*

   Pour tout $c > 0$, e^{cX_n} est une sous-martingale et on a

   $$\mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant m\leqslant n} X_m \geqslant \lambda\right\} = \mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant m\leqslant n}\mathrm{e}^{cX_m} \geqslant \mathrm{e}^{c\lambda}\right\} \leqslant \mathrm{e}^{-c\lambda}\,\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{cX_n}\right)\ .$$

   Par complétion du carré on trouve

   $$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{cX_n}\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{cx}\,\frac{\mathrm{e}^{-x^2/2n}}{\sqrt{2\pi n}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{c^2 n/2}\ ,$$

   d'où

   $$\mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant m\leqslant n} X_m \geqslant \lambda\right\} \leqslant \mathrm{e}^{c^2 n/2 - c\lambda}\ .$$

   La borne est optimale pour $c = \lambda/n$ et vaut

   $$\mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant m\leqslant n} X_m \geqslant \lambda\right\} \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda^2/2n}\ .$$