TD Master 2 – Martingales et calcul stochastique

Corrigé des exercices du chapitre 4 – Martingales

Exercice 4.1

Soient $Y_1, Y_2, \dots$ des variables i.i.d., et soit $X_n = \prod_{m=1}^n Y_m$. Sous quelle condition la suite X_n est-elle une surmartingale? Une sous-martingale? Une martingale?

On choisit la filtration canonique. Comme $\mathbb{E}(|X_n|) = \mathbb{E}(|Y_1|)^n$, une première condition est $\mathbb{E}(|Y_1|) < \infty$, c'est-à-dire $Y_1 \in L^1$.
D'autre part, $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(Y_{n+1}X_n|\mathcal{F}_n) = X_n\mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n\mathbb{E}(Y_1)$, où nous avons utilisé $X_n \subseteq \mathcal{F}_n$, $Y_{n+1} \perp \mathcal{F}_n$ et $\mathbb{E}(Y_{n+1}) = \mathbb{E}(Y_1)$. La suite X_n est donc une surmartingale, une sous-martingale ou une martingale selon que $\mathbb{E}(Y_1) \leqslant 1$, $\mathbb{E}(Y_1) \geqslant 1$ ou $\mathbb{E}(Y_1) = 1$.

Exercice 4.2

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré, et $X_n = \sum_{m=1}^n 1_{B_m}$, avec $B_n \in \mathcal{F}_n$ $\forall n$.

1. *Montrer que X_n est une sous-martingale.*

   Le processus est clairement adapté et intégable.
   De plus, $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(1_{B_{n+1}} + X_n|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(1_{B_{n+1}}|\mathcal{F}_n) + X_n \geqslant X_n$.

2. *Donner la décomposition de Doob de X_n.*

   La décomposition de Doob donne $X_n = M_n + A_n$ avec

   $$A_n = \sum_{m=1}^n \mathbb{E}(1_{B_m}|\mathcal{F}_{m-1}) \;,$$
   $$M_n = \sum_{m=1}^n 1_{B_m} - \mathbb{E}(1_{B_m}|\mathcal{F}_{m-1}) \;.$$

3. *Particulariser au cas $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$.*

   Comme $\mathcal{F}_1 = \sigma(1_{B_1}) = \{\emptyset, \Omega, B_1, B_1^c\}$, l'équation (3.2.11) du polycopié donne

   $$\mathbb{E}(1_{B_2}|\mathcal{F}_1)(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\mathbb{E}(1_{B_2}1_{B_1})}{\mathbb{P}(B_1)} = \mathbb{P}(B_2|B_1) & \text{si } \omega \in B_1 \;, \\[2ex] \dfrac{\mathbb{E}(1_{B_2}1_{B_1^c})}{\mathbb{P}(B_1^c)} = \mathbb{P}(B_2|B_1^c) & \text{si } \omega \in B_1^c \;. \end{cases}$$

   De manière générale, $\mathbb{E}(1_{B_m}|\mathcal{F}_{m-1}) = \mathbb{P}(B_m|C_i^{m-1})$ pour tout $\omega \in C_i^{m-1}$, où les C_i^{m-1} sont les élements de la partition engendrant $\mathcal{F}_{m-1}$ (c'est-à-dire $\mathcal{F}_{m-1} = \sigma(\bigsqcup_i C_i^{m-1})$), obtenus par intersection des B_i et B_i^c pour $i \leqslant m-1$.

Exercice 4.3

On considère le modèle d'urne de Polya, avec paramètres (r, v, c).

1. *Déterminer la loi de la proportion de boules vertes X_n dans le cas $r = v = c = 1$.*

   Après n tirages, l'urne contient $n+2$ boules, dont $m+1$ vertes, où $m \in \{0, 1, \dots, n\}$.
   La probabilité de tirer d'abord les m boules vertes, puis les $l = n - m$ rouges est

   $$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{m}{m+1} \cdot \frac{1}{m+2} \cdots \frac{l}{n+1} = \frac{m!l!}{(n+1)!} \;.$$

Pour tout autre ordre des boules, les termes sont arrangés différemment, mais le résultat est le même. On a donc

$$\mathbb{P}\Big\{X_n = \frac{m+1}{n+2}\Big\} = \binom{n}{m}\frac{m!l!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\;, \qquad m = 1, 2, \dots, n\;,$$

c'est-à-dire que la distribution de X_n est uniforme sur $\big\{\frac{1}{n+2}, \frac{2}{n+2}, \dots, \frac{n+1}{n+2}\big\}$.

2. *Dans le cas général, exprimer le processus croissant $\langle X\rangle_n$ en fonction des X_m et du nombre total de boules N_m aux temps $m \leqslant n$.*

   Après n tirages, le nombre de boules est $N_n = r_n + v_n = r + v + nc$. On a

$$X_n = \begin{cases} \dfrac{v_{n-1}+c}{v_{n-1}+r_{n-1}+c} & \text{avec probabilité } \dfrac{v_{n-1}}{v_{n-1}+r_{n-1}} = X_{n-1}\;, \\ \dfrac{v_{n-1}}{v_{n-1}+r_{n-1}+c} & \text{avec probabilité } \dfrac{r_{n-1}}{v_{n-1}+r_{n-1}} = 1 - X_{n-1}\;. \end{cases}$$

   On en déduit que

$$X_n - X_{n-1} = \begin{cases} \dfrac{c(1-X_{n-1})}{N_n} & \text{avec probabilité } X_{n-1}\;, \\ \dfrac{-cX_{n-1}}{N_n} & \text{avec probabilité } 1 - X_{n-1}\;, \end{cases}$$

   et donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big((X_n - X_{n-1})^2 \bigm| \mathcal{F}_{n-1}\big) &= \frac{c^2}{N_n^2}\big[X_{n-1}(1-X_{n-1})^2 + X_{n-1}^2(1-X_{n-1})\big] \\ &= \frac{c^2}{N_n^2}X_{n-1}(1-X_{n-1})\;. \end{aligned}$$

   Le processus croissant vaut donc

$$\langle X\rangle_n = c^2\sum_{m=1}^{n}\frac{X_{m-1}(1-X_{m-1})}{N_m^2}\;.$$

3. *Montrer que $\lim_{n\to\infty}\langle X\rangle_n < \infty$.*

   Comme $N_m \geqslant cm$ et $X_{m-1}(1-X_{m-1})$ est borné, le critère de Riemann montre que $\langle X\rangle_n$ converge.

Exercice 4.4

On se donne des variables aléatoires i.i.d. $\{\xi_{n,i}\}_{n,i\geqslant1}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note leur distribution $p_k = \mathbb{P}\{\xi_{n,i} = k\}$, leur espérance $\mu > 0$ et leur variance σ^2. On notera $\mathcal{F}_n$ la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_{i,m}, m \leqslant n\}$.
On définit un processus $\{Z_n\}_{n\geqslant0}$ par $Z_0 = 1$ et pour $n \geqslant 0$

$$Z_{n+1} = \begin{cases} \xi_{1,n+1} + \dots + \xi_{Z_n,n+1} & \textit{si } Z_n > 0\;, \\ 0 & \textit{sinon}\;. \end{cases}$$

Ce processus modélise l'évolution d'une population avec initialement $Z_0 = 1$ individu, et dans laquelle chaque individu i donne naissance au temps n à un nombre aléatoire $\xi_{n,i}$ d'enfants, indépendemment et avec la même loi que tous les autres individus.

1. *Montrer que $X_n = Z_n/\mu^n$ est une martingale par rapport à $\mathcal{F}_n$.*

   On a $\mathbb{E}(Z_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\xi_{1,n+1}|\mathcal{F}_n) + \cdots + \mathbb{E}(\xi_{Z_n,n+1}|\mathcal{F}_n) = Z_n\mu$.

2. *Montrer que si $\mu < 1$, alors $\mathbb{P}\{Z_n = 0\} \to 1$ lorsque $n \to \infty$, et donc $X_n \to 0$.*

   X_n étant une martingale, on a $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(Z_0) = 1$, donc $\mathbb{E}(Z_n) = \mu^n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
   Par conséquent, $\mathbb{P}\{Z_n > 0\} = \sum_{k\geqslant 1} \mathbb{P}\{Z_n = k\} \leqslant \mathbb{E}(Z_n) \to 0$, d'où $\mathbb{P}\{Z_n = 0\} \to 1$.
   Z_n ayant valeurs entières, cela signifie que pour toute réalisation ω, il existe $n_0(\omega)$ tel que $Z_n(\omega) = 0$ pour tout $n \geqslant n_0(\omega)$, et donc aussi $X_n(\omega) = 0$ pour ces n.

3. *On suppose $\mu > 1$. Soit $\varphi(s) = \mathbb{E}(s^{\xi_{i,n}}) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$ la fonction génératrice de la distribution d'enfants.*

   (a) *Montrer que φ est croissante et convexe sur $[0,1]$.*

   On a $\varphi'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k s^{k-1} \geqslant 0$. En fait, φ est même strictement croissante pour $s > 0$. En effet, on a nécessairement $p_0 < 1$, car sinon on aurait $\mu = 0$, donc il existe au moins un $k \geqslant 1$ tel que $p_k > 0$.
   De même, $\varphi''(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k s^{k-2} \geqslant 0$. En fait, φ est strictement convexe pour $s > 0$. En effet, si tous les p_k pour $k \geqslant 2$ étaient nuls, on aurait $\mu = p_1 < 1$. Il existe donc nécessairement un $k \geqslant 2$ tel que $p_k > 0$, d'où $\varphi''(s) > 0$ pour $s > 0$.

   (b) *Soit $\theta_m = \mathbb{P}\{Z_m = 0\}$. Montrer que $\mathbb{P}\{Z_m = 0|Z_1 = k\} = \theta_{m-1}^k$ et en déduire que $\theta_m = \varphi(\theta_{m-1})$.*

   Si $Z_1 = k$, on a au temps 1 k individus dont la descendance évolue de manière indépendante. Chacune des k descendances se sera éteinte au temps m avec probabilité θ_{m-1}. Par indépendance, toutes les k lignées se seront éteintes à la fois au temps m avec probabilité θ_{m-1}^k.
   Il suit $\theta_m = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\{Z_m = 0|Z_1 = k\}\mathbb{P}\{Z_1 = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_{m-1}^k p_k = \varphi(\theta_{m-1})$.

   (c) *Montrer que φ admet un unique point fixe ρ sur $[0,1)$.*

   Notons d'abord que $\varphi(1) = 1$, $\varphi'(1) = \mathbb{E}(\xi) = \mu$, $\varphi(0) = p_0 \geqslant 0$ et $\varphi'(0) = p_1 < 1$. La fonction $\psi(s) = \varphi(s) - s$ satisfait donc $\psi(1) = 0$, $\psi'(1) = \mu - 1 > 0$, $\psi(0) \geqslant 0$ et $\psi'(0) < 0$. Etant strictement convexe sur $(0,1]$, ψ admet un unique minimum en $s_0 = (0,1)$. Elle s'annule donc exactement deux fois: une fois en un $\rho \in [0, s_0)$, et une fois en 1.

   (d) *Montrer que $\theta_m \nearrow \rho$ lorsque $m \to \infty$.*

   On a $\theta_0 = 0$. Si $p_0 = 0$, $\theta_m = 0$ pour tout m, mais dans ce cas on a également $\rho = 0$. Si $p_0 > 0$, on a $\theta_1 = p_0 > 0$, et $\rho = \varphi(\rho) > p_0$, donc $0 < \theta_1 < \rho$. Par récurrence, on voit que la suite des θ_m est croissante et majorée par ρ. Elle admet donc une limite, qui est nécessairement ρ.

   En déduire que $\mathbb{P}\{Z_n > 0 \; \forall n\} = 1 - \rho > 0$.

   Le fait que $Z_n = 0$ implique $Z_m = 0$ pour tout $m > n$ permet d'écrire
   $\mathbb{P}\{\exists n \colon Z_n = 0\} = \mathbb{P}\left(\bigcup_n \{Z_n = 0\}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{Z_n = 0\} = \rho < 1$.

4. *Galton et Watson on introduit leur modèle afin de décrire la survie de noms de famille. Au XVIIIe siècle, ces noms n'étaient transmis que par les enfants de sexe masculin. On suppose que chaque famille a trois enfants, dont le sexe est déterminé par une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Le nombre de descendants mâles est donc décrit par un processus de Galton–Watson de loi binomiale $p_0 = p_3 = 1/8$, $p_1 = p_2 = 3/8$. Déterminer la probabilité de survie du nom de famille.*

On a $\varphi(s) = \frac{1}{8}(1 + 3s + 3s^2 + s^3)$. En utilisant le fait que $\varphi(s) - s$ s'anulle en $s = 1$, on obtient par division euclidienne $8(\varphi(s) - s) = (s - 1)(s^2 + 4s - 1)$. La seule racine dans $[0, 1)$ est $\rho = \sqrt{5} - 2$. La probabilité de survie vaut donc $3 - \sqrt{5} \simeq 0.764$.

5. *Déterminer le processus croissant* $\langle X\rangle_n$ *de* X_n. *Calculer* $\lim_{n\to\infty}\langle X\rangle_n$.

   Il est commode d'introduire les variables centrées $\eta_{i,n} = \xi_{i,n} - \mu$.
   On a $Z_n - \mu Z_{n-1} = \eta_{1,n} + \cdots + \eta_{Z_{n-1},n}$, ce qui implique, par indépendance des $\eta_{i,n}$, $\mathbb{E}\left((Z_n - \mu Z_{n-1})^2 | \mathcal{F}_{n-1}\right) = \mathbb{E}\left((\eta_{1,n} + \cdots + \eta_{Z_{n-1},n})^2 | \mathcal{F}_{n-1}\right) = Z_{n-1}\sigma^2$, et donc $\mathbb{E}\left((X_n - X_{n-1})^2 | \mathcal{F}_{n-1}\right) = Z_{n-1}\sigma^2/\mu^{2n} = X_{n-1}\sigma^2/\mu^{n+1}$. Il suit

   $$\langle X\rangle_\infty = \sigma^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{X_{m-1}}{\mu^{m+1}} .$$

   De plus,

   $$\mathbb{E}\left(\langle X\rangle_\infty\right) = \sigma^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}\left(X_{m-1}\right)}{\mu^{m+1}} = \sigma^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^{m+1}} = \frac{\sigma^2}{\mu(\mu - 1)} < \infty .$$