TD Master 2 – Martingales et calcul stochastique

Corrigé des exercices du chapitre 3 – Espérance conditionnelle

Exercice 3.1

Dans une expérience consistant à jeter deux tétraèdres parfaitement symétriques, dont les faces sont numérotées de 1 à 4, on considère les variables aléatoires X, égale à la somme des points, et Y, égale à leur différence (en valeur absolue).

1. *Spécifier un espace probabilisé permettant de décrire cette expérience.*

   Il suffit de prendre $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}^2$ avec la probabilité uniforme.

2. *Déterminer la loi conjointe de X et Y ainsi que leurs espérances.*

   Les lois de $X(\omega) = \omega_1 + \omega_2$ et $Y(\omega) = |\omega_1 - \omega_2|$ sont données dans les tableaux suivants :

X	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

Y	1	2	3	4
1	0	1	2	3
2	1	0	1	2
3	2	1	0	1
4	3	2	1	0

   Par simple dénombrement, on obtient leur loi conjointe et les marginales :

$Y\backslash X$	2	3	4	5	6	7	8	
0	1/16	0	1/16	0	1/16	0	1/16	4/16
1	0	2/16	0	2/16	0	2/16	0	6/16
2	0	0	2/16	0	2/16	0	0	4/16
3	0	0	0	2/16	0	0	0	2/16
	1/16	2/16	3/16	4/16	3/16	2/16	1/16	

   On en déduit les espérances

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=2}^{8} x\mathbb{P}\{X = x\} = 5 , \qquad \mathbb{E}(Y) = \sum_{y=0}^{3} y\mathbb{P}\{Y = y\} = \frac{5}{4} .$$

3. *Calculer $\mathbb{E}(X|Y)$ et $\mathbb{E}(Y|X)$.*

   Notons $\mathbb{E}(X|Y = y)$ la valeur constante de $\mathbb{E}(Y|X)$ sur l'ensemble $\{Y = y\}$. Il suit de la relation (3.2.11) du cours que

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \frac{\mathbb{E}(X1_{\{Y=y\}})}{\mathbb{P}\{Y = y\}} = \sum_x x \frac{\mathbb{P}\{X = x, Y = y\}}{\mathbb{P}\{Y = y\}} = \sum_x x\mathbb{P}\{X = x|Y = y\} .$$

   En appliquant à notre cas, on obtient

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = 5 \quad \forall y \in \{0, 1, 2, 3\} ,$$

   ce qui traduit le fait que la distribution de X est symétrique autour de 5 pour tout Y. De manière similaire, on trouve

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(Y|X = 2) = \mathbb{E}(Y|X = 8) = 0 ,\\
&\mathbb{E}(Y|X = 3) = \mathbb{E}(Y|X = 7) = 1 ,\\
&\mathbb{E}(Y|X = 4) = \mathbb{E}(Y|X = 6) = \tfrac{4}{3} ,\\
&\mathbb{E}(Y|X = 5) = 2 .
\end{aligned}$$

   Cela permet en particulier de vérifier que $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \mathbb{E}(Y)$.

Exercice 3.2

On jette un dé symétrique, puis on jette une pièce de monnaie autant de fois que le dé indique de points. Soit X le nombre de Pile obtenus. Déterminer $\mathbb{E}(X)$.

Un choix possible d'espace probabilisé est $\Omega = \{1,\dots,6\} \times \{0,1\}^6$, avec la probabilité uniforme et

$$N(\omega) = \omega_1 , \qquad X(\omega) = \sum_{i=1}^{\omega_1} \omega_{i+1} .$$

Avant de calculer $\mathbb{E}(X)$, commençons par calculer $\mathbb{E}(X|N)$. Conditionnellement à $N = n$, X suit une loi binomiale de paramètres n et $1/2$, d'où

$$\mathbb{E}(X|N) = \frac{N}{2} .$$

Il suffit alors de prendre l'espérance pour conclure :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|N)) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(N) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{4} .$$

Exercice 3.3

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $\mathcal{F}_1$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Pour tout $A \in \mathcal{F}$, on pose $\mathbb{P}(A|\mathcal{F}_1) = \mathbb{E}(1_A|\mathcal{F}_1)$. Montrer l'inégalité de Bienaymé–Chebyshev

$$\mathbb{P}\big(\{|X| \geqslant a\} \bigm| \mathcal{F}_1\big) \leqslant \frac{1}{a^2}\mathbb{E}(X^2|\mathcal{F}_1) .$$

La monotonie de l'espérance conditionnelle nous permet d'écrire

$$\mathbb{E}(X^2|\mathcal{F}_1) \geqslant \mathbb{E}\big(X^2 1_{\{X^2 \geqslant a^2\}} \bigm| \mathcal{F}_1\big) \geqslant \mathbb{E}\big(a^2 1_{\{X^2 \geqslant a^2\}} \bigm| \mathcal{F}_1\big) = a^2 \mathbb{P}\big(\{|X| \geqslant a\} \bigm| \mathcal{F}_1\big) .$$

Exercice 3.4

Soient X, Y des variables aléatoires réelles intégrables telles que XY soit également intégrable. Montrer les implications :
X, Y indépendantes $\Rightarrow \mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y) \Rightarrow \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
Indication : *Commencer par considérer des fonctions indicatrices.*

Soit $X = 1_A$ et $Y = 1_B$.

- Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Or

$$\int_A Y \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{A\cap B} \mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{E}(Y) = \int_A \mathbb{E}(Y) \,\mathrm{d}\mathbb{P} .$$

  On vérifie facilement des relations analogues avec A remplaçé par A^c, par $\emptyset$ et par Ω. Comme $\sigma(X) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ et $\mathbb{E}(Y) \subseteq \mathcal{F}_0 \subset \sigma(X)$, on a bien que $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y)$.
- Supposons que $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y)$. Comme $A \in \sigma(X)$ on a

$$\mathbb{E}(XY) = \int_A Y \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(Y|X) \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(Y) \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{E}(Y)\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X) .$$

Le résultat s'étend à des variables aléatoires quelconques de la manière habituelle, en les décomposant en partie positive et négative et en approchant chaque partie par des fonctions étagées.

Exercice 3.5

Soient X et Y des variables aléatoires à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$. Exprimer les trois conditions de l'exercice 3.4 à l'aide de la loi conjointe de X et Y. Donner des contre-exemples aux implications inverses.
Indication : *On peut supposer* $\mathbb{E}(Y) = 0$.

Notons la loi conjointe

$$p_{xy} = \mathbb{P}\{X = x, Y = y\} ,$$

et ses marginales

$$p_{x\bullet} = \mathbb{P}\{X = x\} = \sum_y p_{xy} , \qquad p_{\bullet y} = \mathbb{P}\{Y = y\} = \sum_x p_{xy} .$$

Les variables X et Y sont indépendantes si et seulement si

$$p_{xy} = p_{x\bullet} p_{\bullet y} \quad \forall x, y .$$

Les espérances conditionnelles sont données par

$$\mathbb{E}(Y|X = x) = \frac{1}{p_{x\bullet}} \sum_y y p_{xy} ,$$

donc on aura $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y)$ si et seulement si

$$\sum_y y p_{xy} = \sum_y y p_{x\bullet} p_{\bullet y} \quad \forall x .$$

Enfin la condition $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ s'écrit

$$\sum_{xy} xy p_{xy} = \sum_{xy} xy p_{x\bullet} p_{\bullet y} .$$

Si X et Y prennent leurs valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ et $\mathbb{E}(Y) = 0$, on aura nécessairement $p_{\bullet -} = p_{\bullet +}$. Si de plus on veut avoir $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y)$, alors il faut que $p_{x-} = p_{x+}$ pour tout x.

Il est alors facile de construire des contre-exemples aux implications inverses. Le tableau suivant donne un exemple de loi conjointe pour laquelle $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y) = 0$, mais X et Y ne sont pas indépendantes :

$Y \backslash X$	-1	0	1	
-1	$1/10$	0	$2/10$	$3/10$
0	0	$4/10$	0	$4/10$
1	$1/10$	0	$2/10$	$3/10$
	$2/10$	$4/10$	$4/10$	

Et voici un exemple où $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0$, mais $\mathbb{E}(Y|X) \neq \mathbb{E}(Y) = 0$:

$Y \backslash X$	-1	0	1	
-1	$1/10$	$2/10$	$1/10$	$4/10$
0	0	$2/10$	0	$2/10$
1	$2/10$	0	$2/10$	$4/10$
	$3/10$	$4/10$	$3/10$	

Exercice 3.6

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé, et* $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ *des sous-tribus de* $\mathcal{F}$.

1. *Montrer que*

$$\mathbb{E}\left([X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_2)]^2\right) + \mathbb{E}\left([\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_2) - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)]^2\right) = \mathbb{E}\left([X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)]^2\right)$$

Notons $X_2 = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_2)$ et $X_1 = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1) = \mathbb{E}(X_2|\mathcal{F}_1)$. On a

$$\mathbb{E}(XX_1) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(XX_1|\mathcal{F}_1)\right) = \mathbb{E}\left(X_1 \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)\right) = \mathbb{E}(X_1^2) .$$

Par conséquent, en développant le carré on obtient

$$\mathbb{E}\left([X - X_1]^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X_1^2) .$$

De manière similaire, on montre que $\mathbb{E}(XX_2) = \mathbb{E}(X_2^2)$ et $\mathbb{E}(X_1X_2) = \mathbb{E}(X_1^2)$, d'où

$$\mathbb{E}\left([X - X_2]^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X_2^2) ,$$
$$\mathbb{E}\left([X_2 - X_1]^2\right) = \mathbb{E}(X_2^2) - \mathbb{E}(X_1^2) .$$

Ceci implique le résultat (qui est équivalent au théorème de Pythagore appliqué à X, X_1 et X_2, considérés comme des vecteurs de $L^2(\mathcal{F})$).

2. *On pose* $\mathrm{Var}(X|\mathcal{F}_1) = \mathbb{E}(X^2|\mathcal{F}_1) - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)^2$. *Montrer que*

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left(\mathrm{Var}(X|\mathcal{F}_1)\right) + \mathrm{Var}\big(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)\big) .$$

On peut procéder par un calcul direct. Une autre méthode est de commencer par observer que

$$\mathrm{Var}(X|\mathcal{F}_1) = \mathbb{E}\left([X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)]^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_1\right) .$$

Appliquons alors l'égalité montrée en 1. avec $\mathcal{F}_1$ remplacé par $\mathcal{F}_0$, et $\mathcal{F}_2$ remplacé par $\mathcal{F}_1$. Comme $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}(X)$, le premier terme du membre de gauche est égal à $\mathbb{E}(\mathrm{Var}(X|\mathcal{F}_1))$, le second à $\mathrm{Var}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1))$, alors que le membre de droite vaut $\mathrm{Var}(X)$.

3. *Soit* $Y_1, Y_2, \dots$ *une suite de variables aléatoires i.i.d. d'espérance* μ *et de variance* σ^2. *Soit* N *une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{N}$, *indépendante de tous les* Y_i. *Soit finalement* $X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N$. *Montrer que*

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 \mathbb{E}(N) + \mu^2 \,\mathrm{Var}(N) .$$

Appliquons le résultat précédent avec $\mathcal{F}_1 = \sigma(N)$. On a $\mathbb{E}(X|N) = \mu N$ et en développant la somme on trouve $\mathbb{E}(X^2|N) = \sigma^2 N + \mu^2 N^2$. Il suit que

$$\mathrm{Var}(X|N) = \sigma^2 N .$$

Comme d'autre part on a $\mathrm{Var}(\mathbb{E}(X|N)) = \mathrm{Var}(\mu N) = \mu^2 \,\mathrm{Var}(N)$, le résultat est montré.

4. *Déterminer la variance de la variable aléatoire* X *de l'exercice 3.2.*

C'est une application du résultat précédent, avec $\mu = 1/2$, $\sigma^2 = 1/4$ et $\mathrm{Var}(N) = 35/12$. On trouve donc $\mathrm{Var}(X) = 77/48$.

Exercice 3.7

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé, et* $\mathcal{G}$ *une sous-tribu de* $\mathcal{F}$*. On considère deux variables aléatoires* X *et* Y *telles que*

$$\mathbb{E}\left(Y|\mathcal{G}\right) = X \qquad \textit{et} \qquad \mathbb{E}\left(X^2\right) = \mathbb{E}\left(Y^2\right)$$

1. *Calculer* $\operatorname{Var}(Y - X|\mathcal{G})$*.*

   On a $\mathbb{E}\left(Y - X|\mathcal{G}\right) = X - \mathbb{E}\left(X|\mathcal{G}\right) = 0$, et

   $$\mathbb{E}\left((Y-X)^2 \,\big|\, \mathcal{G}\right) = \mathbb{E}\left(Y^2|\mathcal{G}\right) - \mathbb{E}\left(X^2|\mathcal{G}\right) = \mathbb{E}\left(Y^2|\mathcal{G}\right) - X^2 \;.$$

   Par conséquent,

   $$\operatorname{Var}(Y - X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}\left(Y^2|\mathcal{G}\right) - X^2 \;.$$

2. *En déduire* $\operatorname{Var}(Y - X)$*.*

   $$\begin{aligned}\operatorname{Var}(Y-X) &= \mathbb{E}\left(\operatorname{Var}(Y-X|\mathcal{G})\right) + \operatorname{Var}\bigl(\mathbb{E}\left(Y-X|\mathcal{G}\right)\bigr) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(Y^2|\mathcal{G}\right)\right) - \mathbb{E}\left(X^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left(Y^2\right) - \mathbb{E}\left(X^2\right) \\ &= 0 \;.\end{aligned}$$

3. *Que peut-on en déduire sur la relation entre* X *et* Y *?*

   Elles sont égales presque sûrement.

Exercice 3.8

Un processus ponctuel de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ *est un processus* $\{N_t\}_{t\geqslant 0}$ *tel que*

i. $N_0 = 0$;
ii. *pour* $t > s \geqslant 0$, $N_t - N_s$ *est indépendant de* N_s*;*
iii. *pour* $t > s \geqslant 0$, $N_t - N_s$ *suit une loi de Poisson de paramètre* $\lambda(t-s)$*:*

$$\mathbb{P}\left\{N_t - N_s = k\right\} = \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!} \;, \qquad k \in \mathbb{N} \;.$$

On se donne des variables aléatoires i.i.d. $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *et de carré intégrables. Soit*

$$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} \xi_k \;.$$

Le processus X_t est appelé un processus de Poisson composé.

1. *Calculer* $\mathbb{E}\left(X_t\right)$*.*

   Les ξ_k étant indépendants, on a

   $$\mathbb{E}\left(X_t|N_t\right) = N_t\,\mathbb{E}\left(\xi_0\right)$$

   et donc

   $$\mathbb{E}\left(X_t\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X_t|N_t\right)\right) = \mathbb{E}\left(N_t\right)\mathbb{E}\left(\xi_0\right) = \lambda t\,\mathbb{E}\left(\xi_0\right) \;.$$

2. *Calculer* $\mathrm{Var}(X_t)$.

   La variance étant une forme quadratique, on a

$$\mathrm{Var}\big(\mathbb{E}\,(X_t|N_t)\big) = \mathrm{Var}(N_t)\,\mathbb{E}\,(\xi_0)^2 = \lambda t\,\mathbb{E}\,(\xi_0)^2 \ .$$

   Afin de déterminer $\mathrm{Var}(X_t|N_t)$, on commence par calculer

$$\mathbb{E}\,(X_t^2|N_t) = \sum_{k,l=1}^{N_t} \mathbb{E}\,(\xi_k\xi_l) = N_t\,\mathbb{E}\,(\xi_0^2) + (N_t^2 - N_t)\,\mathbb{E}\,(\xi_0)^2 = N_t\,\mathrm{Var}(\xi_0) + N_t^2\,\mathbb{E}\,(\xi_0)^2 \ .$$

   Par conséquent,

$$\mathrm{Var}(X_t|N_t) = \mathbb{E}\,(X_t^2|N_t) - \mathbb{E}\,(X_t|N_t)^2 = N_t\,\mathrm{Var}(\xi_0) \ ,$$

   d'où il suit

$$\mathbb{E}\,\big(\mathrm{Var}(X_t|N_t)\big) = \mathbb{E}\,(N_t)\,\mathrm{Var}(\xi_0) = \lambda t\,\mathrm{Var}(\xi_0) \ .$$

   En appliquant l'Exercice 3.6, on conclut que

$$\mathrm{Var}(X_t) = \mathrm{Var}\big(\mathbb{E}\,(X_t|N_t)\big) + \mathbb{E}\,\big(\mathrm{Var}(X_t|N_t)\big) = \lambda t\,\mathbb{E}\,(\xi_0^2) \ .$$