TD Master 2 – Martingales et calcul stochastique

Corrigé des exercices du chapitre 10 – Diffusions

Exercice 10.1

On considère la diffusion définie par l'équation

$$\mathrm{d}X_t = -X_t\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t$$

(processus d'Ornstein–Uhlenbeck).

1. *Donner le générateur L associé et son adjoint L^*.*

$$L = -x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\;, \qquad L^*\rho = \frac{\partial}{\partial x}(x\rho) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}\;.$$

2. *Soit $\rho(x) = \pi^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-x^2}$. Calculer $L^*\rho(x)$. Que peut-on en conclure?*

   On trouve $L^*\rho = 0$. Par conséquent, $\rho(x)$ est une solution stationnaire de l'équation de Kolmogorov progressive (ou de Fokker–Planck) $\partial_t u = L^*u$, ce qui signifie que c'est une mesure invariante du système : Si X_0 suit la loi ρ, alors X_t suit la même loi pour tout $t > 0$.
   Remarquons que ρ est la densité d'une variable aléatoire normale, centrée, de variance 1/2. Nous avons déjà obtenu dans l'exercice 8.1, que ρ est la loi asymptotique de la solution de la même EDS avec $X_0 = 0$. En fait on peut montrer que pour toute distribution initiale, la loi de X_t tend vers la distribution stationnaire ρ.

Exercice 10.2

On considère la diffusion définie par l'équation

$$\mathrm{d}X_t = X_t\,\mathrm{d}B_t\;.$$

1. *Donner le générateur L associé.*

$$L = \frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\;.$$

2. *Trouver la solution générale de l'équation $Lu = 0$.*

   On a $Lu = 0$ si $u''(x) = 0$, dont la solution générale est $u(x) = c_1 x + c_2$.

3. *En déduire $\mathbb{P}^x\{\tau_a < \tau_b\}$, où τ_a dénote le temps de premier passage de X_t en a. Indication: Il s'agit de calculer $\mathbb{E}^x(\psi(X_\tau))$, où τ est le temps de première sortie de $[a,b]$, et $\psi(a) = 1$, $\psi(b) = 0$.*

   On sait que $u(x) = \mathbb{P}^x\{\tau_a < \tau_b\}$ est solution du problème

$$\begin{cases} Lu(x) = 0 & \text{pour } x \in [a,b]\;, \\ u(a) = 1\;, \\ u(b) = 0\;. \end{cases}$$

   En substituant la solution générale dans les conditions aux bords, on peut déterminer les constantes d'intégration c_1 et c_2, d'où la solution

$$\mathbb{P}^x\{\tau_a < \tau_b\} = \frac{b-x}{b-a}\;.$$

Exercice 10.3

On considère plus généralement la diffusion définie par l'équation

$$dX_t = rX_t \, dt + X_t \, dB_t \ , \qquad r \in \mathbb{R}$$

(mouvement Brownien géométrique).

1. *Calculer son générateur L.*

$$L = rx\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ .$$

2. *Montrer que si $r \neq 1/2$, la solution générale de l'équation $Lu = 0$ s'écrit*

$$u(x) = c_1 x^\gamma + c_2 \ ,$$

où γ est une fonction de r qu'on déterminera.

En substituant, on obtient $Lu(x) = c_1\gamma(r + \frac{1}{2}(\gamma - 1))x^\gamma$, donc $Lu = 0$ à condition de prendre $\gamma = 1 - 2r$.

Remarque : La solution générale s'obtient en observant que $v(x) = u'(x)$ satisfait l'équation

$$\frac{v'(x)}{v(x)} = -\frac{2r}{x} \ ,$$

que l'on peut intégrer.

3. *On suppose $r < 1/2$. Calculer $\mathbb{P}^x\{\tau_b < \tau_a\}$ pour $0 < a < x < b$, puis $\mathbb{P}^x\{\tau_b < \tau_0\}$ en faisant tendre a vers 0. On remarquera que si $X_{t_0} = 0$ alors $X_t = 0$ pour tout $t \geqslant t_0$. Par conséquent si $\tau_0 < \tau_b$, alors X_t n'atteindra jamais b. Quelle est la probabilité que cela arrive?*

Dans ce cas, on a $\gamma > 0$. En procédant comme à l'exercice précédent, on obtient

$$\mathbb{P}^x\{\tau_b < \tau_a\} = \frac{x^\gamma - a^\gamma}{b^\gamma - a^\gamma} \ .$$

Comme $a^\gamma \to 0$ lorsque $a \to 0$, il suit que

$$\mathbb{P}^x\{\tau_b < \tau_0\} = \left(\frac{x}{b}\right)^\gamma \ .$$

La probabilité que X_t n'atteigne jamais b est donc $1 - (X_0/b)^\gamma$.

4. *On suppose maintenant $r > 1/2$.*

   (a) *Calculer $\mathbb{P}^x\{\tau_a < \tau_b\}$ pour $0 < a < x < b$, et montrer que cette probabilité tend vers 0 pour tout $x \in]a, b[$ lorsque $a \to 0_+$. En conclure que presque sûrement, X_t n'atteindra jamais 0 dans cette situation.*

   Dans ce cas, on a $\gamma < 0$. En procédant comme à l'exercice précédent, on obtient

$$\mathbb{P}^x\{\tau_a < \tau_b\} = \frac{x^\gamma - b^\gamma}{a^\gamma - b^\gamma} \ .$$

   Comme $a^\gamma \to +\infty$ lorsque $a \to 0$, toutes les autres grandeurs étant constantes, on obtient en faisant tendre a vers 0

$$\mathbb{P}^x\{\tau_0 < \tau_b\} = 0 \qquad \forall x \in]a, b[\ .$$

(b) *Trouver α et β tels que $u(x) = \alpha \log x + \beta$ satisfasse le problème*

$$\begin{cases} (Lu)(x) = -1 & \text{si } 0 < x < b \,, \\ u(x) = 0 & \text{si } x = b \,. \end{cases}$$

L'équation $Lu = -1$ donne $\alpha = -1/(r - 1/2)$ et la condition au bord donne $\beta = \log b/(r - 1/2)$.

(c) *En déduire $\mathbb{E}^x(\tau_b)$.*

C'est précisément la solution du problème ci-dessus, donc

$$\mathbb{E}^x(\tau_b) = \frac{1}{r - 1/2} \log\biggl(\frac{b}{x}\biggr) \,.$$

Cela montre que les solutions tendent à croître exponentiellement. En effet, on a $\mathbb{E}^x(\tau_b) = T$ pour

$$b = x \,\mathrm{e}^{(r-1/2)T} \,.$$

Exercice 10.4

1. *On considère une diffusion d'équation*

$$\mathrm{d}X_t = f(X_t)\,\mathrm{d}t + g(X_t)\,\mathrm{d}B_t \,.$$

Les fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont supposées suffisamment régulières pour assurer l'existence d'une unique solution pour tout temps $t \geqslant 0$.

(a) *Calculer*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{E}^{\,x}\bigl(X_t\bigr)\Big|_{t=0_+} := \lim_{h\to 0_+} \frac{\mathbb{E}^{\,x}\bigl(X_h\bigr) - x}{h} \,.$$

Soit $\varphi(x) = x$. Alors $(L\varphi)(x) = f(x)\varphi'(x) + \frac12 g(x)^2\varphi''(x) = f(x)$, et par la définition du générateur,

$$\lim_{h\to 0_+} \frac{\mathbb{E}^{\,x}\bigl(X_h\bigr) - x}{h} = (L\varphi)(x) = f(x) \,.$$

Ainsi le coefficient de dérive $f(x)$ s'interprète comme la dérivée de la position moyenne.

(b) *Calculer*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{E}^{\,x}\Bigl(\mathrm{e}^{\gamma[X_t - \mathbb{E}^{\,x}(X_t)]}\Bigr)\Big|_{t=0_+} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\biggl[\mathrm{e}^{-\gamma\mathbb{E}^{\,x}(X_t)}\,\mathbb{E}^{\,x}\Bigl(\mathrm{e}^{\gamma X_t}\Bigr)\biggr]\bigg|_{t=0_+} \,.$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\biggl[\mathrm{e}^{-\gamma\mathbb{E}^{\,x}(X_t)}\,\mathbb{E}^{\,x}\Bigl(\mathrm{e}^{\gamma X_t}\Bigr)\biggr]\bigg|_{t=0_+} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\biggl[\mathrm{e}^{-\gamma\mathbb{E}^{\,x}(X_t)}\biggr]\bigg|_{t=0_+} \mathrm{e}^{\gamma x} + \mathrm{e}^{-\gamma x}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\biggl[\mathbb{E}^{\,x}\Bigl(\mathrm{e}^{\gamma X_t}\Bigr)\biggr]\bigg|_{t=0_+} \\
&= -\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\biggl[\mathbb{E}^{\,x}(X_t)\biggr]\bigg|_{t=0_+} \mathrm{e}^{-\gamma x}\,\mathrm{e}^{\gamma x} + \mathrm{e}^{-\gamma x}\bigl(L\,\mathrm{e}^{\gamma x}\bigr)(x) \\
&= -\gamma f(x) + \mathrm{e}^{-\gamma x}\biggl[f(x)\gamma\,\mathrm{e}^{\gamma x} + \frac12 g(x)^2\gamma^2\,\mathrm{e}^{\gamma x}\biggr] \\
&= \frac12\gamma^2 g(x)^2 \,.
\end{aligned}$$

(c) *En déduire*
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{E}^{\,x}\Big(\big[X_t - \mathbb{E}^{\,x}(X_t)\big]^k\Big)\Big|_{t=0_+}$$
pour $k = 2, 3, \dots$.

Comme
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{E}^{\,x}\Big(\mathrm{e}^{\gamma[X_t - \mathbb{E}^{\,x}(X_t)]}\Big)\Big|_{t=0_+} = \sum_{k\geqslant 0}\frac{\gamma^k}{k!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{E}^{\,x}\Big(\big[X_t - \mathbb{E}^{\,x}(X_t)\big]^k\Big)\Big|_{t=0_+}$$
on obtient, par identification terme à terme des séries,
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{E}^{\,x}\Big(\big[X_t - \mathbb{E}^{\,x}(X_t)\big]^k\Big)\Big|_{t=0_+} = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 1\ , \\ g(x)^2 & \text{si } k = 2\ , \\ 0 & \text{si } k \geqslant 3\ . \end{cases}$$
En particulier, $g(x)^2$ s'interprète comme la vitesse de croissance de la variance du processus.

2. *On se donne une suite d'ensembles dénombrables* $\mathcal{X}^{(N)}$, $N \in \mathbb{N}^*$. *Sur chaque* $\mathcal{X}^{(N)}$ *on définit une chaîne de Markov* $\{Y_n^{(N)}\}_{n\geqslant 0}$, *de matrice de transition* $P^{(N)}$. *On pose*
$$v^{(N)}(y) = \mathbb{E}^{\,y}\big(Y_1^{(N)} - y\big) := \sum_{z\in\mathcal{X}^{(N)}}(z-y)P^{(N)}(y,z)$$
et, pour $k = 2, 3, \dots$,
$$m_k^{(N)}(y) = \mathbb{E}^{\,y}\Big([Y_1^{(N)} - \mathbb{E}^{\,y}(Y_1^{(N)})]^k\Big)\ .$$
On définit une suite de processus $\{X_t^{(N)}\}_{t\geqslant 0}$, *à trajectoires continues, linéaires par morceaux sur tout intervalle* $]k/N, (k+1)/N[$, *telles que*
$$X_{n/N}^{(N)} = N^{-\alpha}Y_n^{(N)}\ , \qquad n \in \mathbb{N}$$
pour un $\alpha > 0$.

(a) *Exprimer, en fonction de* $v^{(N)}$ *et* $m_k^{(N)}$,
$$\lim_{h\to 0_+}\frac{\mathbb{E}^{\,x}\big(X_h^{(N)} - x\big)}{h} \qquad \text{et} \qquad \lim_{h\to 0_+}\frac{\mathbb{E}^{\,x}\big([X_h^{(N)} - \mathbb{E}^{\,x}(X_h^{(N)})]^k\big)}{h}\ .$$
Le processus $X_t^{(N)}$ étant linéaire sur l'intervalle $[0, 1/N]$, on a
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0_+}\frac{\mathbb{E}^{\,x}\big(X_h^{(N)} - x\big)}{h} &= \frac{\mathbb{E}^{\,x}\big(X_{1/N}^{(N)} - x\big)}{1/N} \\ &= \frac{\mathbb{E}^{\,y}\big(N^{-\alpha}Y_1^{(N)} - N^{-\alpha}y\big)}{1/N}\bigg|_{y=N^\alpha x} \\ &= N^{-\alpha+1}v^{(N)}(N^\alpha x)\ .\end{aligned}$$
De même, on obtient
$$\lim_{h\to 0_+}\frac{\mathbb{E}^{\,x}\big([X_h^{(N)} - \mathbb{E}^{\,x}(X_h^{(N)})]^k\big)}{h} = N^{-k\alpha+1}m_k^{(N)}(N^\alpha x)\ .$$

(b) *Donner des conditions nécessaires sur les $v^{(N)}$ et $m_k^{(N)}$ pour que la suite des $X_t^{(N)}$ converge vers la diffusion X_t.*

En vertu du point 1., il faut que

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} N^{-\alpha+1} v^{(N)}(N^\alpha x) &= f(x)\;, \\
\lim_{N\to\infty} N^{-2\alpha+1} m_2^{(N)}(N^\alpha x) &= g(x)^2\;, \\
\lim_{N\to\infty} N^{-k\alpha+1} m_k^{(N)}(N^\alpha x) &= 0\;, \qquad\qquad k \geqslant 3\;.
\end{aligned}$$

3. *Montrer que ces conditions sont vérifiées, pour un α approprié, dans le cas où chaque $Y^{(N)}$ est la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ et $X_t = B_t$ est le mouvement Brownien.*

   Dans ce cas on a $v^{(N)}(y) = 0$ et $m_k^{(N)}(y) = 1$ pour k pair et 0 pour k impair. En prenant $\alpha = 1/2$, les conditions sont donc satisfaites avec $f(x) = 0$ et $g(x) = 1$.

4. *On rappelle que le modèle d'Ehrenfest à N boules est la chaîne de Markov $Y_n^{(N)}$ sur $\{0, 1, \dots, N\}$ de probablités de transition*

   $$P^{(N)}(y, y-1) = \frac{y}{N}\;, \qquad P^{(N)}(y, y+1) = 1 - \frac{y}{N}\;.$$

   En supposant que la suite de processus définis par

   $$X_{n/N}^{(N)} = N^{-1/2}\biggl(Y_n^{(N)} - \frac{N}{2}\biggr)\;, \qquad n \in \mathbb{N}\;,$$

   converge vers une diffusion X_t, déterminer les coefficients $f(x)$ et $g(x)$ de cette diffusion.

   On a

   $$v^{(N)}(y) = (y-1)\frac{y}{N} + (y+1)\Bigl(1 - \frac{y}{N}\Bigr) - y = 1 - \frac{2y}{N}$$

   et

   $$\begin{aligned}
   m_k^{(N)}(y) &= \Bigl(y - 1 - y - 1 + \frac{2y}{N}\Bigr)^k \frac{y}{N} + \Bigl(y + 1 - y - 1 + \frac{2y}{N}\Bigr)^k \Bigl(1 - \frac{y}{N}\Bigr) \\
   &= 2^k \frac{y}{N}\Bigl(1 - \frac{y}{N}\Bigr)\biggl[\Bigl(\frac{y}{N}\Bigr)^{k-1} + (-1)^k\Bigl(1 - \frac{y}{N}\Bigr)^{k-1}\biggr]\;.
   \end{aligned}$$

   Par conséquent,

   $$\begin{aligned}
   \lim_{N\to\infty} N^{1/2} v^{(N)}\Bigl(N^{1/2}x + \frac{N}{2}\Bigr) &= -2x\;, \\
   \lim_{N\to\infty} m_2^{(N)}\Bigl(N^{1/2}x + \frac{N}{2}\Bigr) &= 1\;, \\
   \lim_{N\to\infty} N^{1-k/2} m_k^{(N)}\Bigl(N^{1/2}x + \frac{N}{2}\Bigr) &= 0\;, \qquad\qquad k \geqslant 3\;.
   \end{aligned}$$

   La diffusion limite est donc le processus d'Ornstein–Uhlenbeck

   $$\mathrm{d}X_t = -2X_t\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t\;.$$