TD Master 1 – Chaînes de Markov

Série 2

Exercice 1

Montrer que la loi du temps de premier passage en i ($i \neq 0$) de la marche aléatoire symétrique unidimensionnelle est donnée par

$$\mathbb{P}\left\{\tau_i = n\right\} = \begin{cases} \dfrac{|i|}{n} \mathbb{P}\left\{X_n = i\right\} & \text{pour } n \in \{|i|, |i|+2, \dots\} , \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

(Théorème 2.1.5 du polycopié). En déduire que $\mathbb{E}(\tau_i) = +\infty$.

Indications:

1. Par symétrie, on peut supposer $i > 0$.
2. Ecrire l'événement $\{\tau_i = n\}$ à l'aide des événements $\{X_{n-1} = i - 1\}$ et $\{\tau_i \leqslant n - 2\}$.
3. A l'aide du principe de réflexion, montrer que

   $$\mathbb{P}\left\{\tau_i = n\right\} = \frac{1}{2}\Big[\mathbb{P}\left\{X_{n-1} = i-1\right\} - \mathbb{P}\left\{X_{n-1} = i+1\right\}\Big]$$

   et conclure par un calcul direct.

Exercice 2

On considère une marche aléatoire unidimensionnelle symétrique sur $\{0, 1, \dots, N\}$ avec conditions aux bords absorbantes, c'est-à-dire que l'on suppose les états 0 et N absorbants. Soit

$$\tau = \tau_0 \wedge \tau_N = \inf\big\{n \geqslant 0 \colon X_n \in \{0, N\}\big\}$$

le temps d'absorption, et soit

$$p(i) = \mathbb{P}_i\{X_\tau = N\} .$$

1. Déterminer $p(0)$ et $p(N)$.
2. Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, N-1\}$, on a

   $$p(i) = \frac{1}{2}\big[p(i-1) + p(i+1)\big] .$$

   Une fonction $f : \mathbb{Z} \supset A \to \mathbb{R}$ telle que $f(i) = \frac{1}{2}[f(i-1) + f(i+1)]$ pour tout $i \in A$ est appelée *harmonique* (discrète).
3. Montrer (par l'absurde) le *principe du maximum*: Une fonction harmonique sur A ne peut atteindre son minimum et son maximum qu'au bord de A (on pourra supposer A de la forme $A = \{a, a+1, \dots, b-1, b\}$, dans ce cas son bord est $\partial A = \{a, b\}$).
4. Montrer que si f et g sont deux fonctions harmoniques sur A, alors toute combinaison linéaire de f et g est encore harmonique.
5. Montrer que si f et g sont deux fonctions hamoniques sur A, qui coïncident sur le bord de A, alors elles sont égales partout dans A (considérer $f - g$).
6. Montrer que toute fonction linéaire $f(i) = ci + h$ est harmonique.
7. En utilisant les points 1., 2., 5. et 6., déterminer la fonction p.