TD M55: Probabilités

Série 7: Chaînes de Markov - Chaînes de Markov absorbantes

Exercice 1. Au pays d'Oz, il n'y a jamais deux jours consécutifs avec du soleil. Si un jour il y a du soleil, il y a une chance sur deux pour que le lendemain il pleuve et une chance sur deux qu'il neige. S'il y a de la neige ou de la pluie, il y a une chance sur deux pour que le lendemain il y ait le même temps. Lorsqu'il y a un changement de temps de neige (ou pluie) vers un autre temps, il n'y a qu'une chance sur deux que ce soit du soleil.

i) Décrire le problème à l'aide d'une chaîne de Markov dont on donnera la matrice de transition.

ii) Donner la probabilité d'avoir du beau temps le troisième jour, sachant que le premier jour il y avait du soleil. Quelle est la probabilité d'avoir du mauvais temps le 3ème jour, sachant que le premier jour il y avait du soleil.

iii) De façon générale, donner la probabilité d'avoir du soleil le $n$ème jour sachant

a) qu'il faisait beau le premier jour.

b) qu'il pleuvait le premier jour

c) qu'il neigeait le premier jour.

Exercice 2. On étudie un caractère donné d'un animal lors de croisements successifs. Le caractère observé sur l'animal est donné par deux gènes, l'un dominant (G) et l'autre récessif (g). Quand l'animal a les deux gènes (GG), (Gg) ou (gG), le caractère observé est le même; on l'appellera *caractère 1*. Par contre, lorsque les deux gènes sont gg, on observe sur l'animal le *caractère 2*.

Les trois paires de gènes possibles sont donc (GG): purement dominant; (Gg): hybride (équivalent à (gG)); et (gg): purement récessif.

Chaque animal hérite d'un gène de chacun de ses parents; Les gènes des parents, quels qu'ils soient, sont transmis de façon équiprobable.

i) En supposant que chaque nouveau-né est systématiquement croisé avec un animal hybride, construire une chaîne de Markov qui décrive le caractère des individus d'une même descendance (on décrira en fait les paires de gènes, car elles permettent de déduire le caractère). Donner la matrice de transition P associée.

ii) Donner la probabilité qu'à la génération $n = 2$ l'individu soit purement récessif, sachant que le premier individu était purement dominant. Même question pour $n = 3$. Même question pour n quelconque.

Exercice 3. Dans une production en série, les articles passent par 3 étapes de fabrication; ils sont inspectés à la fin de chaque étape. Ils peuvent alors présenter trois états possibles:

- totalement défectueux; probabilité p; dans ce cas l'article est jeté.
- légèrement défectueux; probabilité q; dans ce cas il passe une seconde fois par la même étape.
- en bon état, probabilité $r = 1 - p - q$; l'article passe à l'étape suivante ou quitte le processus de fabrication avec le label "en bon état" s'il était dans la 3ème étape de fabrication.

i) Décrivez ce processus par une chaîne de Markov à 5 états: { "être dans l'étape 1", "être dans l'étape 2 ", "être dans l'étape 3", "être jeté", "sortir de la chaîne de fabrication avec le label *en bon état*".}. Construire la matrice de transition de ce processus. On suppose désormais $p = 0,1$ et $q = 0,3$. A-t-on une chaîne de Markov absorbante? Calculez la matrice fondamentale N (on pourra se contenter de donner les valeurs des éléments de matrice à 10^{-3} près).

ii) Trouver la durée moyenne, i.e. l'espérance, jusquà ce qu'un article quitte la machine; l'état initial étant ici "être dans l'étape 1". Trouver la probabilité qu'un article quittant la machine soit en bon état.

Exercice 4. Supposons que deux joueurs jouent à pile ou face. Peu importe qui des deux lance la pièce, la probabilité d'obtenir pile ou face étant la même. Le jeu s'arrête lorsque l'on obtient dans 3 jets consécutifs PFP (le joueur A gagne) ou FFF (le joueur B gagne).

i) En considérant comme ensemle fini $\mathfrak{X}$ les valeurs possibles de trois jets consécutifs, faire un schéma des probabilités de transition entre tous les états. Ecrire la matrice de transition associée de telle façon que la matrice soit sous la forme canonique $\begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{pmatrix}$.

ii) Nous allons maintenant simplifier le problème en construisant un autre ensemble fini $\mathfrak{X}'$, de cardinal inférieur à celui de $\mathfrak{X}$. Soit

$$\mathfrak{X}' = \{(*P);\ (PF);\ (FF);\ (A \text{ gagne});\ (B \text{ gagne})\} = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

où (PF) signifie que les deux tirages précédents ont été *pile* puis *face*; $(*P)$ signifie que les deux tirages précédents sont soit *pile* puis à nouveau *pile*, soit *face* puis *pile*; etc.

Construire le schéma des probabilités de transition. Vérifier que $\mathfrak{X}'$ suffit à décrire toutes les situations. Ecrire la matrice de transition P associée. A-t-on une chaîne de Markov absorbante? Si oui, calculer la matrice fondamentale N.

iii) On prend comme distribution de départ, celle donnée par le vecteur

$$(\mathbb{P}\{(*P)\}, \mathbb{P}\{(PF)\}, \mathbb{P}\{(FF)\}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}).$$

Calculer le nombre moyen de jets jusqu'à ce qu'un joueur gagne. Donner la probabilité de gagner pour chacun des joueurs.

Exercice 5. Dans le modèle économique de Leontief[1], on considère n industries $1, 2, \cdots, n$. La $i$ème industrie a besoin d'un montant $0 \leq q_{ij} \leq 1$ de biens (en dollars) de chaque compagnie j pour fabriquer un bien de valeur 1 dollar. La demande extérieure (i.e., autre que celle des industries entre elles), en dollars, est donnée par le vecteur $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \cdots, d_n)$. Soit Q la matrice $n \times n$ de coefficients (q_{ij}).

i) Montrer que si les industries produisent un montant total donné par le vecteur

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

(i.e., chaque industrie i produit x_i), alors le montant total de biens de chaque type dont les industries on besoin est donné par le vecteur

$$\mathbf{x}Q.$$

(On pourra commencer par récapituler la demande faite à l'industrie 1 par chaque industrie 1 à n; faire de même pour l'industrie 2, puis 3, etc.)

ii) Montrer alors que pour satisfaire une demande extérieure $\mathbf{d}$, ainsi que la demande interne, les industries doivent produire un montant total donné par le vecteur $\mathbf{x}$ qui satisfait l'équation

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}Q + \mathbf{d}.$$

iv) Montrer que si Q est la matrice Q d'une chaîne de Markov absorbante de matrice de transition $P = \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{pmatrix}$, alors il est possible de satisfaire n'importe quelle demande extérieure $\mathbf{d}$.

v) Supposons que la somme sur chaque ligne de Q est inférieure ou égale à 1. Donnez une interprétation économique de cette condition. Formez une chaîne de Markov en prenant pour états les industries, avec probabilités de transition q_{ij}, et en rajoutant un état absorbant noté $n+1$. On pose

$$q_{i,n+1} = 1 - \sum_{j=1}^{n} q_{ij}.$$

Montrez que cette chaîne est absorbante si pour toutes les entreprises, soit elles font un profit, soit elles dépendent uniquement, pour la fabrication de leur produit, d'une entreprise qui fait du profit (on commencera par traduire ce que chacune de ces conditions signifie en terme des coefficients q_{ij}).

vi) Pour ce modèle, définir le produit national brut $\mathbf{X}$. Trouver une expression du P.N.B. en fonction du vecteur demande $\mathbf{d}$ et du vecteur $\mathbf{t}$ qui donne les temps moyens d'absorption.

[1] W.W. Leontief, *Inpout-Output Economics* (Oxford: Oxford University Press, 1966)