TD M55: Probabilités

Série 6: Processus de Poisson

Exercice 1. Supposons que les secousses sismiques dans la moitié ouest des Etats-Unis surviennent de manière telle qu'on puisse les décrire par un processus de Poisson $N(t)$ (t est le temps compté en semaines), de paramètre $\lambda = 2$.

i) Trouver la probabilité qu'au moins trois secousses aient lieu durant les deux prochaines semaines.

ii) Trouver la distribution de la durée, mesurée en semaines, entre maintenant et la prochaine secousse.

Exercice 2. Des clients arrivent dans une banque à un rythme poissonien de taux λ. Supposons que deux clients arrivent durant la première heure. Quelle est la probabilité que

- les deux soient arrivés durant les 20 premières minutes?
- L'un au moins soit arrivé pendant les 20 premières minutes?

Exercice 3. Un certain service nécessite la mise en place d'un dispositif technique. Admettons que la durée de vie T de ce dispositif est exponentielle de paramètre $\lambda = 1$. Dès qu'un dispositif tombe en panne, il est immédiatement remplacé par un élément identique afin de ne pas interrompre le service.

i) Quelle est la probabilité d'avoir plus de trois pannes dans un intervalle d'une durée de deux heures? (*Indication:* On commencera par construire un processus de Poisson $N(t)$ à l'aide de variables aléatoires T_i indépendantes et de même loi que celle T).

ii) Quelle est la distribution de l'instant d'occurence de la première panne sachant que le deuxième dispositif a été mis en marche et fonctionne encore à l'instant $t_0 = 3h$?

iii) Soit T_i la variable aléatoire qui représente le temps écoulé entre la $(i-1)$ème panne et la $i$ème panne. On suppose maintenant que l'on ne possède que 9 dispositifs. Soit l'événement $E =$ "le temps total de service S est au moins égal à 12h"?

iii-a) Exprimer $\mathbb{P}\{E\}$ à l'aide du processus $N(t)$, puis à l'aide des T_i.

iii-b) Donnez une valeur approchée de $\mathbb{P}\{E\}$ en utilisant le théorème de la limite centrale.

Exercice 4. Le long d'une route, l'écoulement des voitures peut être décrit par un processus de Poisson $N(t)$ de paramètre $\lambda = 2$: $N(t) =$ variable aléatoire nombre de véhicules entre les instants 0 et t (mesurés en minutes) arrivant à un point donné. A cause de travaux, le traffic est arrêté alternativement pour chaque direction. On admet que le traffic se compose de la manière suivante:

60% de voitures légères	de 5m de longueur
30% de cars	de 10m de longueur
10% de longs véhicules	de 20m de longueur

i) D'après ce tableau, donner la longueur l moyenne d'un véhicule arrivant au point de travaux. (Réponse: $l = 8$m). Dans la suite, on supposera que tous les véhicules sont de longueur l.

ii) Pendant combien de temps peut-on arrêter le traffic si l'on désire que la queue ainsi formée ne dépasse une longueur de 250m qu'avec une probabilité de $0,2$? *Indication:* On écrira la condition sur le temps t cherché à l'aide de $N(t)$; puis en réexprimant cette condition à l'aide des v.a. indépendantes T_i qui mesurent le temps écoulé entre les arrivées au point de traffic de la $(i-1)$ème et de la $i$ème voiture, et à l'aide du théorème de la limite centrale, on donnera une estimation de ce temps t. (Réponse: $t \approx 13.2\,\text{min}$).

Exercice 5. Le nombre $N(t)$ de versements d'indemnités effectués par une compagnie d'assurance en t jours est donné par un processus de Poisson de taux $\lambda = 4$ versements par jour. On appellera S_i les variables aléatoires qui représentent le temps écoulé, compté en jours, jusqu'au $i$ème versement. On suppose que le montant du $i$ème versement est une variable aléatoire Y_i qui suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ (i.e., $\mathbb{P}\{Y_1 = n\} = p(1-p)^{n-1},\ n \geq 1$). On fait l'hypothèse que les Y_i sont indépendants, et sont indépendants des $N(t)$ ($\forall t > 0$).

i) Sachant que $\mathbb{E}(Y_1) = 1000\,Euros$, calculer p. Calculer $\text{Var}(Y_1)$.

ii) Soit $U_t = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{N(t)}$ la variable aléatoire qui représente les versements totaux effectués par la compagnie en t jours:

$$U_t : \begin{array}{lcl} (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) & \to & \mathbb{N} \\ \omega & \mapsto & Y_1(\omega) + Y_2(\omega) + \cdots + Y_{N(t)(\omega)}(\omega) \end{array}$$

(si $N(t)(\omega) = 0$, on pose $U_t(\omega) = 0$).

Soit $g_t(z)$ la fonction génératrice de U_t et $h(z)$ celle de Y_1. Montrer l'égalité

$$g_t(z) = \exp(\lambda t(h(z) - 1)).$$

En déduire la moyenne et la variance des sommes versées en $t = 5$ jours.

Exercice 6. Le nombre d'accidents qui se produisent par jour dans une ville donnée peut être décrit par une loi de Poisson de moyenne 2. Le nombre de personnes impliquées par accident est une variable aléatoire géométrique de paramètre 0.5. En utilisant la même approche que dans l'exercice précédent, calculer la moyenne et la variance du nombre de personnes accidentées par semaine.

Exercice 7. Reprendre l'exercice 4 en modélisant la longueur des véhicules par une variable aléatoire discrète prenant les valeurs $\{5, 10, 20\}$ avec des probabilités respectives 0.6, 0.3 et 0.1.