TD M55: Probabilités

Série 4 (suite): variables aléatoires continues - changement de variable

Exercice 1. Soient X et Y deux v.a. indépendantes de loi de probabilité à densité.
On note $f_X(x)$ et $f_Y(x)$ les densités respectives.
i) Si X et Y sont uniformement distribués sur $]0,1[$, (i.e. $f_X(x) = f_Y(x) = \chi_{]0,1[}(x)$), trouver la densité de probabilité de $Z = X + Y - [X + Y]$. ($[x]$ est la fonction partie entière de x).
ii) Si X et Y sont deux v.a. normales, centrées, réduites et indépendantes, trouver les lois de $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ et $\theta = \mathrm{Arctg}(Y/X)$. En déduire que R et θ sont indépendants.

Exercice 2. Soient X, Y deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, suivant la loi uniforme sur $[0,1]$, notée ν_u. On pose $Z = X^2 + Y^2$ si $X^2 + Y^2 \leq 1$ et $Z = 0$ sinon.

Montrer que pour toute fonction f borélienne, positive, définie sur $\mathbb{R}$ on a

$$E[f(Z)] = \frac{\pi}{4}\int_0^1 f(r)dr + (1 - \frac{\pi}{4})f(0)$$

indication : Ecrire Z sous la forme $g(X,Y)$ pour une fonction g que l'on explicitera puis on utilisera les coordonnées polaires. En déduire que la loi ν_Z de Z est donnée par $\nu_Z = \frac{\pi}{4}\nu_u + (1 - \frac{\pi}{4})\delta_0$.

Série 5: Marches aléatoires

Exercice 3. On dispose d'une somme de 10 euros et on joue avec une machine à sous. A chaque partie, on met 1 euro dans la machine. Celle-ci rend soit 2 euros soit rien, de façon équiprobable.

i) Modéliser ce problème à l'aide d'une marche aléatoire S_k.

ii) Soit N le nombre de fois que l'on peut jouer jusqu'à ce qu'on n'ait plus d'argent. Donner la loi de la variable aléatoire N.

iii) Calculer la probabilité qu'on joue un nombre de fois inférieur ou égal à 20.

Exercice 4. Lors de l'élection présidentielle américaine de 2004, Bush et Kerry ont obtenu un nombre de voix dans l'état de l'Ohio respectivement égal à r et d $(r > d)$ (le nombre de vote total étant alors égal à $r + d$; on ne comptera pas les votes nuls ou blancs).

i) On suppose que le dépouillement des votes se fait un à un et on cherche à estimer la probabilité de l'événement $E =$"Bush est resté en tête tout au long du décompte". On modélise ce probllème de la façon suivante. Soit (X_i) une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, telles que $X_i = 1$ si lors du dépouillement le $i$ème vote est pour Bush, et $X_i = -1$ s'il est pour Kerry. Soit $S_j = \sum_{i=1}^{j} X_i$ la marche aléatoire qui représente la différence entre les votes républicains et les votes démocrates à l'étape j du dépouillement. Soit $A = \{\omega \in \Omega \text{ t.q. } S_{d+r}(\omega) = r - d, S_1(\omega) > 0,\ S_2(\omega) > 0,\ \cdots, S_{r+d-1}(\omega) > 0\}$. Montrer (à l'aide d'une représentation graphique si nécessaire) que l'on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{E\} &= \mathbb{P}\{A \mid S_{r+d} = r - d\} \\ &= \frac{\text{nbre de chemins partant de } (0,0) \text{ et arrivant à } (r+d, r-d) \text{ sans couper l'axe des abscisses}}{\text{nombre de chemins qui partent de } (0,0) \text{ et arrivent à } (r+d, r-d)}\end{aligned}$$

En particulier, vérifier que $\mathbb{P}\{E\}$ ne dépend pas de la valeur $p := \mathbb{P}\{X_1 = 1\}$

ii) Dans la suite, d'après le résultat du i), on supposera $p = 1/2$ et on appellera S_j la marche aléatoire symétrique correspondante qui mesure l'écart des votes entre les deux candidats au $j^{\text{ème}}$ dépouillement. En posant $k = r + d$ et $n = r - d$:

- montrer

$$\mathbb{P}\{S_1>0,\ S_2>0,\ \cdots,S_{k-1}>0,\ S_k=n\}=\mathbb{P}\{S_1=1,S_k=n)-\mathbb{P}\{S_1=1,S_k=n,\ \exists j,S_j=0\}.$$

- montrer $\mathbb{P}\{S_1=1,\ S_k=n,\ \exists j,S_j=0\}=\mathbb{P}\{S_1=1,\ S_k=-n\}$ (faire un dessin et visualiser le nombre de chemins des deux événements).
- à l'aide de ce qui précède, montrer:

$$\mathbb{P}\{S_1>0,\ S_2>0,\cdots,S_{k-1}>0,\ S_k=n\}=\frac{1}{2}\left(\mathbb{P}\{S_k=n\mid S_1=1\}-\mathbb{P}\{S_k=-n\mid S_1=1\}\right),$$

 et en déduire $\mathbb{P}\{S_1>0,\ \cdots,\ S_{k-1}>0,S_k=n\}$ en fonction de n et k.

iii) Calculer $\mathbb{P}\{S_k=n\}$. En déduire, avec ii), que $\mathbb{P}\{E\}=\frac{r-d}{r+d}$.

Exercice 5. La ruine du joueur. Un joueur dispose d'une mise initiale de k euros. A chaque partie qu'il joue, il a une probabilité p d'augmenter sa mise de 1 et une probabilité $(1-p)$ de la diminuer de 1. Ce joueur se fixe comme objectif de jouer jusqu'à ce qu'il soit ruiné (mise =0) ou jusqu'à ce que son capital atteigne la somme de M euros (M étant un entier choisi à l'avance).

On veut calculer la probabilité de l'événement "le joueur est ruiné".

i) Modéliser le problème à l'aide d'une marche aléatoire S_k.

ii) Soit l'événement

$E_k=$ "Le capital du joueur atteint zéro avant d'atteindre la valeur M, pour une mise initiale k"

et soit

$$q_k=\mathbb{P}\{E_k\}.$$

a) Calculer q_0 et q_M.

b) Montrer la relation de récurrence

$$q_j=p\,q_{j+1}+(1-p)q_{j-1}.$$

En déduire que $(q_{j+1}-q_j)=\frac{1-p}{p}(q_j-q_{j-1})$, puis établir une relation entre $(q_{j+1}-q_j)$ et (q_1-q_0).

En utilisant les sommes télescopiques

$$q_M-q_0=\sum_{j=0}^{M-1}(q_{j+1}-q_j)\ ,$$

montrer alors que

(1) $$(q_1-q_0)\sum_{j=0}^{M-1}\left(\frac{1-p}{p}\right)^j=-1,$$

et en déduire une expression simple de (q_1-q_0) en fonction de p.

iii) A nouveau à l'aide de sommes télescopiques, montrer que pour tout $K\in\{1,\ldots,M\}$,

(2) $$q_K-q_0=(q_1-q_0)\sum_{j=0}^{K-1}\left(\frac{1-p}{p}\right)^j$$

iv) Déduire de (1) et (2) une expression de q_k en fonction de p (On considèrera les 2 cas $p=1/2$ et $p\neq 1/2$). Vér ifier le résultat pour $K=M$.

v) Soit l'événement

$F_k=$ "Le capital du joueur atteint la valeur M pour une mise initiale k" (avant d'être ruiné).

Pourquoi l'égalité $\Omega=F_k\cup E_k$ est-elle fausse?

Montrer par la même méthode que i) à iv) que l'on a

$$\mathbb{P}\{F_k\}=\begin{cases}\dfrac{((1-p)/p)^k-1}{((1-p)/p)^M-1} & \text{si } p\neq 1/2\\[2ex] \dfrac{k}{M} & \text{si } p=1/2\end{cases}$$

et vérifier alors qu'on a quand même la relation

$$\mathbb{P}\{F_k\}+\mathbb{P}\{E_k\}=1.$$