TD M55: Probabilités

Série 4: variables aléatoires continues

Exercice 1. Lois à densité usuelles

i) *Loi uniforme.*
On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $[a,b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$, de densité

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x).$$

Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$ et la fonction génératrice g de X.

ii) *Loi normale (ou loi de Laplace-Gauss) $\mathcal{N}(m,\sigma)$.*
On considère une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma)$ de densité

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right).$$

Dans le cas $m=0$ et $\sigma=1$, calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$ et la fonction génératrice g.

iii) *Loi Log-normale.*
On considère une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma)$. La variable aléatoire $Y=\mathrm{e}^X$ suit alors une loi appelée Log-normale. Considérons le cas particulier $m=0$ et $\sigma=1$, et calculer la fonction de répartition $F_Y(x) := \mathbb{P}\{Y \le x\}$ en fonction de la fonction de répartition de X. En déduire que la densité de Y est $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}\exp\left(-\frac{1}{2}\log^2 x\right)\mathbb{1}_{]0,+\infty[(x)}$.

iv) *Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.*
Soient $\lambda > 0$ et la variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ, de densité

$$f(x) = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x).$$

Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$, la variance $\mathrm{Var}(X)$, et la fonction génératrice g de X.

Si X suit une loi $\mathcal{E}(\lambda)$, montrer que $Y=[X]$ (partie entière de X) suit une loi géométrique, i.e., une loi discrète définie pour $n\in\mathbb{N}$ par $\mathbb{P}\{Y=n\} = pq^n$, où $q:=\mathrm{e}^{-\lambda}$. Montrer que la variable aléatoire $U=\mathrm{e}^{-\lambda X}$ suit la loi uniforme sur $]0,1[$.

v) *Première loi de Laplace.*
Soit une variable aléatoire X qui suit une loi à densité

$$f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|},\ x\in\mathbb{R}.$$

Pour $u\in]-1,1[$, montrer que la fonction génératrice g de X vérifie $g(u) = \frac{1}{1-u^2}$. En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

vi) *Loi de Cauchy.*
Soit une variable aléatoire X qui suit une loi à densité

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2},\ x\in\mathbb{R}.$$

Calculer $\mathbb{E}(X)$. Peut-on calculer $\mathrm{Var}(X)$? Soit V une variable aléatoire uniformément distribuée sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et soient $Y=\tan V$, $Z=1/\tan V$. Calculer $\mathbb{P}\{Y\le x\}$ et en déduire que Y suit la loi de Cauchy. Montrer de même que Z suit la loi de Cauchy.

vii) *Loi gamma $\Gamma(p,\lambda)$.*
Soient $p>0$ et $\lambda>0$. On considère la loi gamma de densité

$$f(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(p)}\mathrm{e}^{-\lambda x}(\lambda x)^{p-1}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x).$$

Montrer que $\mathbb{E}(X) = \frac{p}{\lambda}$ et $\mathrm{Var}(X) = \frac{p}{\lambda^2}$.

Exercice 2. Soient X et Y deux variables aléatoires, et h la densité du couple définie par

$$h(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{si } 0 < x < y \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

i) Vérifier que h est une densité de probabilité.
ii) Calculer les densités marginales f de X et g de Y.
iii) Est-ce que X et Y sont indépendantes?
iv) Calculer $P\left\{\dfrac{X}{Y} \leq z \text{ et } Y \leq y\right\}$; en déduire la loi de $\dfrac{X}{Y}$.
v) Est-ce que X/Y et Y sont des variables aléatoires indépendantes?

Exercice 3. Deux amis ont rendez-vous à midi; Des causes de retard indépendantes font que chacun arrive entre 12h et 13h. La probabilité d'arrivée de chacun d'eux dans un intervalle de temps donné étant proportionnelle à la longueur de cet intervalle, quelle est la probabilité que les deux amis se rencontrent si chacun attend au plus 1/4 d'heure (On pourra construire deux variables aléatoires réelles continues indépendantes X_1 et X_2 qui donnent respectivement le temps de retard de chacun des deux amis).

Exercice 4. Soient X, Y et Z trois variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose que X suit la loi uniforme sur $[0,1]$ et que Y et Z suivent la loi exponentielle de paramètre 1.
i) Déterminer la loi du couple (Y,Z) et la loi du couple (X,Y).
Indication. On cherche une loi à densité de la forme $f(x,y)$ telle que

$$P\big((Y,Z) \in [a,b] \times [c,d]\big) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dx\right) dy\ .$$

ii) Déterminer la loi de $Y+Z$ puis la loi de $X+Y$.

Exercice 5. Un contre-exemple.

Soient X et U deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, et U suit une loi binômiale de paramètre 1/2: $\mathbb{P}\{U=-1\} = \mathbb{P}\{U=1\} = 1/2$. On définit la variable aléatoire $Y = UX$. Montrer que $Y = \mathcal{N}(0,1)$. Montrer que $\mathbb{E}(XY) = 0 = \mathbb{E}(X)E(Y)$. Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes (On rappellera la définition d'indépendance de deux variables aléatoires X et Y, ainsi que la caractérisation de cette propriété à l'aide des espérances).

Exercice 6. Le paradoxe de Bertrand.

Une corde dans un cercle $\mathcal{C}$ est un segment AB dont les extrémités A et B sont sur le cercle $\mathcal{C}$. Supposons que l'on trace au hasard une corde dans le cercle de centre 0 et de rayon 1 (cercle unité). Nous allons chercher à évaluer la probabilité de l'événement

$$\mathfrak{E} = \text{“la longueur } L \text{ de la corde } AB \text{ est supérieure à } \sqrt{3}\text{”}$$

On va montrer que cette probabilité va (bien sûr) dépendre de la façon dont on choisit aléatoirement la corde.

Remarque préliminaire: Si on se donne un point I dans le disque unité, on peut construire une corde en considérant d'abord la droite OI (où O est le centre du cercle), et sa perpendiculaire (AB) passant par I et coupant le cercle aux points A et B. On obtient alors la corde AB (faites un dessin).

i) Montrer que si on prend un point I dans le disque unité, et qu'on construit la corde associée de la façon décrite ci-dessus, alors la longueur L de cette corde est supérieure à $\sqrt{3}$ si et seulement si le point I est dans le disque de centre O et de rayon 1/2.

ii) On suppose que le point I est pris au hasard équiprobablement dans le disque unité $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, i.e., on suppose que les coordonnées cartésiennes (X,Y) de I sont distribuées suivant la loi conjointe uniforme de densité $f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{\pi}\mathbb{1}_D(x,y)$. Montrer que dans ce cas $\mathbb{P}\{\mathfrak{E}\} = \frac{1}{4}$.

iii) On suppose que le point I est construit en choisissant ses coordonnées polaires (R,Θ) de façon indépendante, et uniforme; i.e., R suit la loi uniforme sur $[0,1]$ et Θ suit la loi uniforme sur $[0,2\pi]$. Montrer que dans ce cas $\mathbb{P}\{\mathfrak{E}\} = \frac{1}{2}$.

iv) On suppose cette fois que la corde AB est construite en choisissant au hasard et indépendamment les points A et B, chacun d'eux étant repéré par la coordonnée angulaire de ses coordonnées polaires. Comme la longueur de la corde reste invariante par rotation, on peut supposer que le point B est toujours situé en $(r,\theta) = (1,0)$. Le point A est alors repéré par ses coordonnées polaires $(1,\alpha)$, où α est la variable aléatoire angle qui suit une loi uniforme sur $[0,2\pi]$. Montrer que la longueur de l'arc L est supérieure à $\sqrt{3}$ si et seulement si $2\pi/3 < \alpha < 4\pi/3$. En déduire que $\mathbb{P}\{\mathfrak{E}\} = \frac{1}{3}$.