TD M55: Probabilités

Série 3 - Les théorèmes limite

Exercice 1. Parmi les pièces produites par une chaîne de montage, 10% sont défectueuses. Estimer la probabilité que parmi 400 pièces, plus de 50 soient défectueuses.

Exercice 2. Dans une petite ville, 1000 cinéphiles choisissent chaque vendredi soir de se rendre dans l'un des deux cinémas. Le premier cinéma a 450 places, l'autre en a 470. Si le cinéma choisi est complet, ils retournent chez eux et regardent "Star Academy" (on suppose que chaque cinéphile choisit l'un des 2 cinémas avec la même probabilité, et de façon indépendante du choix des autres cinéphiles).

1. Estimer la probabilité que le premier cinéma soit complet, celle que le second cinéma soit complet.
2. Afin d'augmenter leurs recettes, les gérants des deux cinémas décident d'agrandir leurs salles. Combien chaque cinéma devrait-il avoir de places (au minimum) pour que la probabilité qu'un client trouve le cinéma complet soit inférieur à 1%?

Exercice 3. Calculer la probabilité que dans un amphi de n étudiants, au moins deux étudiants aient leur anniversaire le même jour. On admettra que chaque année compte 365 jours, et que les anniversaires sont distribués de manière uniforme. Donner une approximation de la probabilité pour $n \ll 365$,

1. en faisant un développement limité en $\epsilon = n/365$;
2. en utilisant la formule de Stirling.

Quel doit être le nombre n d'étudiants pour qu'il y ait au moins une chance sur deux pour qu'ils soient deux à avoir leur anniversaire le même jour?

Exercice 4. Admettons que lorsqu'on arrondit un nombre réel à l'entier le plus proche, l'erreur commise soit une variable aléatoire distribuée uniformément sur l'intervalle $]-1/2, 1/2[$. On arrondit $n = 75$ nombres réels à l'entier le plus proche et on calcule la somme. Quelle est la probabilité que l'écart entre la somme ainsi obtenue et la somme exacte des n nombres soit supérieur à 2.5?

Exercice 5. Des ingénieurs estiment que W, le poids (en tonnes) qu'une travée de pont peut supporter sans subir de dommages au niveau de sa structure, suit une loi normale de moyenne 4400 et décart type 40. Supposons que le poids (en tonnes) d'un véhicule passant sur ce pont est une variable aléatoire normale de moyenne 3 et d'écart type 0.3.

On rappelle que si $X = \mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ et $Y = \mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$, alors

$$X + Y = \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}) \quad \textit{et} \quad X - Y = \mathcal{N}(m_1 - m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$$

i) Donner la loi de la variable aléatoire K_n qui donne le poids en tonnes de n véhicules.
ii) Que modélise l'événement $\{W - K_n < 0\}$?
iii) Combien de voitures devraient se trouver sur cette travée pour que la probabilité de dommage de structure soit supérieure à 0.1?

Exercice 6. Un détaillant vend un produit à l'unité. Le temps qui s'écoule entre deux ventes consécutives est une variable aléatoire de moyenne égale à une semaine et d'écart-type égal à une semaine. Au moment de la dernière vente, le détaillant a constaté qu'il lui restait 36 unités. S'il doit se réapprovisionner seulement dans 6 mois (26 semaines), quelle est la probabilité que son stock ne soit pas épuisé avant le réapprovisionnement ?

Exercice 7. *Méthode de Monte-Carlo* Soit g une fonction réelle continue sur $[0,1]$, et soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. Expliciter $\mathbb{E}(g(X_n))$. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(X_k(\omega)) - \int_0^1 g(x)dx\right| < \epsilon\right\} = 1 \ .$$

En quoi cette formule peut-elle être utile pour le calcul de $\int_0^1 g(x)dx$?