TD M55 – Probabilités

Série 2 – Variables aléatoires

Exercice 1

Soit X le nombre de points obtenus en lançant un dé (non pipé). Calculer l'espérance et la variance de X. Généraliser à la somme des points obtenus en jetant 2, puis n dés.

Exercice 2

Un sac contient 4 jetons rouges, numérotés 0, 1, 2, 3, et 3 jetons bleus, numérotés 1, 2, 3. Les jetons sont indiscernables au toucher. On extrait simultanément deux jetons du sac. Soit X la variable aléatoire égale à la somme des deux numéros obtenus. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 3

On jette trois dés truqués: un dé blanc, dont 4 faces ont 2 points et 2 faces ont 5 points; un dé rouge, dont 4 faces ont 4 points et 2 faces ont 1 point; et un dé noir, dont toutes les faces ont 3 points. On note, respectivement, X_b, X_n et X_r le nombre de points indiqués par le dé blanc, noir et rouge. Calculer

$$\mathbb{P}(X_b \geqslant X_r), \quad \mathbb{P}(X_r \geqslant X_n), \quad \mathbb{P}(X_n \geqslant X_b).$$

Exercice 4

Un questionnaire à choix multiples comporte 10 questions, offrant chacune trois réponses (dont une seule est correcte). Soit X le nombre de réponses justes obtenues par un étudiant répondant au hasard à chaque question. Quelle est la loi de X? Déterminer

- l'espérance de X;
- son écart-type;
- la probabilité que l'étudiant ne donne aucune réponse juste.
- la probabilité qu'il donne plus de 6 réponses justes.

Exercice 5

On vous propose le jeu suivant: vous misez une somme de votre choix. Deux tétraèdres, dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, sont jetés simultanément de manière indépendante.

- Si les deux tétraèdres indiquent le même nombre, vous récupérez 5 fois votre mise.
- Si les nombres diffèrent d'un point, vous perdez votre mise.
- Si les nombres diffèrent de deux ou trois points, respectivement, vous devez encore payer le double ou le triple de la mise.

Calculer l'espérance et la variance du gain. Comment faudrait-il modifier la somme gagnée pour que le jeu soit équitable?

Exercice 6

Une urne contient une boule blanche et une noire. A trois reprises, on tire une boule dans l'urne, puis on la remet en ajoutant une deuxième boule de la même couleur. Soit X le nombre de boules blanches se trouvant dans l'urne après les trois tirages. Déterminer sa loi et son espérance. Peut-on généraliser à k tirages? Que se passe-t-il si l'urne contient initialement une boule blanche et deux boules noires?

Exercice 7

Un archer disposant de k flèches effectue des tirs répétés jusquà ce qu'il ait soit atteint la cible, soit épuisé ses flèches. Sachant que le tireur atteint la cible avec probabilité p lors de chaque tir, et que ceux-ci sont indépendants, déterminer la probabilité qu'il n'atteigne jamais la cible, la loi et l'espérance du nombre de tirs effectués.
On rappelle que pour tout $z \neq 1$,

$$1 + z + \cdots + z^{k-1} = \frac{1 - z^k}{1 - z}.$$

Exercice 8

Dans une expérience consistant à jeter deux tétraèdres parfaitement symétriques, on considère les variables aléatoires X, égale à la somme des points, et Y, égale à leur différence (en valeur absolue).
Déterminer

- la loi conjointe de X et Y,
- les lois (marginales) de X et Y, leur espérance et leur variance,
- la covariance de X et Y,
- la variance de $X + Y$.

Exercice 9

Une urne contient r boules rouges et b boules blanches. On tire successivement k boules, sans remise ($k \leqslant r + b$).

- Soit X_i la variable aléatoire valant 1 si la $i$ème boule est rouge, 0 sinon. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X_1, de X_2, puis de X_i pour $i = 3, \ldots, k$.
- Soit $X = X_1 + \cdots + X_k$ le nombre de boules rouges tirées. Calculer son espérance, puis sa loi (loi hypergéométrique).
- Déterminer la covariance de X_i et X_j pour $i \neq j$, et en déduire la variance de X.