TD M55 – Probabilités

Série 1 – Rappels: combinatoire, probabilités conditionnelles

Exercice 1

Combien le mot MISSISSIPPI a-t-il d'anagrammes?

Exercice 2

On dénote par

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

le nombre de manières de choisir k objets parmi n.

1. Vérifier la relation
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$
par calcul direct, puis par un argument de combinatoire. Expliquer la relation avec le triangle de Pascal.
2. Démontrer la formule du binôme
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Exercice 3

1. Combien de fois faut-il jeter un dé (non pipé) afin d'obtenir au moins un 6 avec une probabilité supérieure ou égale à 99%?
2. Est-il plus probable d'obtenir
   - au moins un nombre pair en lançant 2 dés,
   - ou au moins un multiple de 3 en lançant 3 dés?

Exercice 4

Une urne contient 5 boules blanches et 4 boules noires. On tire successivement 2 boules au hasard. Calculer les probabilités d'obtenir

- 2 boules noires,
- 2 boules blanches,
- 1 boule de chaque couleur,
- 1 boule noire au second tirage, sachant qu'on a obtenu une blanche au premier tirage.

On considérera le cas avec remise, puis le cas sans remise.

Exercice 5

Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie on constate qu'il y a, parmi les malades, un vacciné pour 9 non vaccinés.

1. Les événements "avoir été vacciné" et "être tombé malade" sont-ils indépendants?
2. Au cours de l'épidémie, il y a eu un malade sur 12 parmi les vaccinés. Quelle était la probablilité de tomber malade pour quelqu'un de non vacciné?

Exercice 6

Madame Soleil habite Nantes, où il pleut un jour sur deux. Les prévisions météo ont un taux de fiabilité de 2/3 (s'il pleut, il y a deux chances sur trois pour que la météo ait prédit de la pluie, de même s'il fait beau).
Madame Soleil emporte toujours son parapluie si la météo annonce de la pluie. Si la météo annonce du beau temps, elle emporte son parapluie une fois sur trois.
Calculer la probabilité

1. qu'elle soit surprise par la pluie sans parapluie (qu'elle n'ait pas son parapluie, sachant qu'il pleut);
2. qu'elle ait emporté son parapluie inutilement (qu'elle ait son parapluie, sachant qu'il fait beau).

Exercice 7

Dans un jeu télévisé, il y a 3 portes fermées; derrière l'une d'elles se trouve une luxueuse voiture, alors que chacune des deux autres cache une chèvre. Le candidat commence par choisir une porte, qui reste fermée. L'animateur ouvre alors l'une des deux autres portes, derrière laquelle se trouve une chèvre. Le candidat peut alors choisir entre

- maintenir son choix;
- choisir l'autre porte.

De toute manière, il remporte ce qui se trouve derrière la porte finalement choisie.
Sachant qu'il veut gagner la voiture, que lui conseillez-vous?

Exercice 8

Deux joueurs A et B jouent à la variante suivante de "pile ou face": A gagne dès que Face apparaît trois fois de suite. B l'emporte si la séquence Pile–Face–Pile apparaît. Quelle est la probabilité que A gagne?
Indication: La probabilité de gagner au prochain coup ne dépend que des deux derniers résultats. On considérera les événements

$$
\begin{aligned}
\_PP &: \text{les deux derniers jets sont deux Pile} \\
\_PF &: \text{les deux derniers jets sont Pile-Face} \\
\_FP &: \text{les deux derniers jets sont Face-Pile} \\
\_FF &: \text{les deux derniers jets sont deux Face} \\
P &: \text{le premier jet donne Pile} \\
F &: \text{le premier jet donne Face}
\end{aligned}
$$

Déterminer des relations entre les probabilités conditionnelles

$$q(B) = \mathbb{P}(\text{A gagne}|B)$$

pour tous les événements de la liste et résoudre.