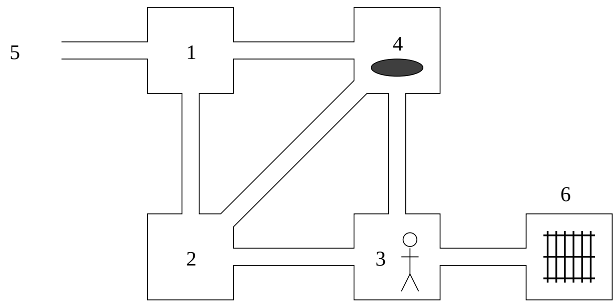
Université du SUD Toulon-Var. Licence MASS 3ème année, 2004-05

Examen de Probabilités - M55

Jeudi 8 septembre 2005
Durée de l'examen: 2h
Un barême est donné à titre <u>*indicatif*</u>
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Problème 1. Un prisonnier s'est évadé de sa cellule (pièce 6). Il se trouve initialement dans la pièce 3. Il se déplace dans la prison, plongée dans l'obscurité totale, selon les règles suivantes:

- A chaque minute, il passe d'une pièce à une autre, choisie au hasard, de manière équiprobable, parmi toutes les pièces adjacentes à celle où il se trouve.
- S'il revient dans la pièce 6, la porte se ferme et il se retrouve prisonnier.
- S'il arrive dans la pièce 4, il disparaît dans les oubliettes.
- S'il arrive en 5, il est libre.



(1) **(3pt)** Décrire le cheminement du prisonnier par une chaîne de Markov. Montrer que cette chaîne est absorbante. Ecrire la matrice de transition sous sa forme canonique.
(2) **(3pt)** Calculer la matrice fondamentale de la chaîne.
(3) **(3pt)** Calculer le nombre moyen de minutes pour que le prisonnier, partant de 3, atteigne l'une des cases 4, 5 ou 6.
(4) **(3pt)** Calculer les probabilités que le prisonnier se retrouve libre, aux oubliettes, ou dans sa cellule. De quelle pièce doit-il partir pour que la probabilité de se retrouver libre soit maximale?

Problème 2. (5pt)

Supposons que les secousses sismiques dans la moitié ouest des Etats-Unis surviennent de manière telle qu'on puisse les décrire par un processus de Poisson $N(t)$ (t est le temps compté en semaines), de paramètre $\lambda = 2$.

i) Trouver la probabilité qu'au moins trois secousses aient lieu durant les deux prochaines semaines.

ii) Trouver la distribution de la durée, mesurée en semaines, entre maintenant et la prochaine secousse.

Problème 3. (5pt)

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ de densité

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right).$$

Dans le cas $m = 0$ et $\sigma = 1$, calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$.