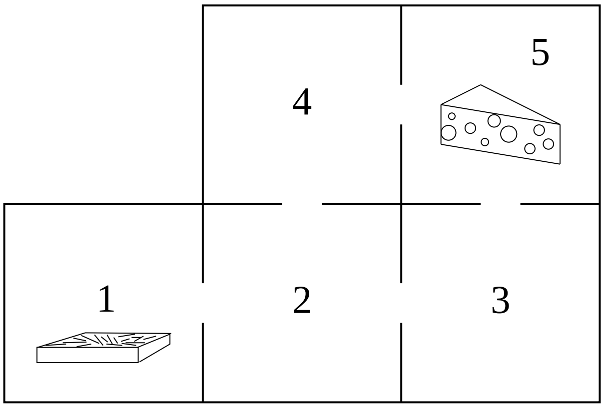
Université du SUD Toulon-Var. Licence MASS 3ème année, 2004-05

Examen de Probabilités - M55

Jeudi 13 janvier 2005
Durée de l'examen: 2h
Un barème est donné à titre indicatif
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

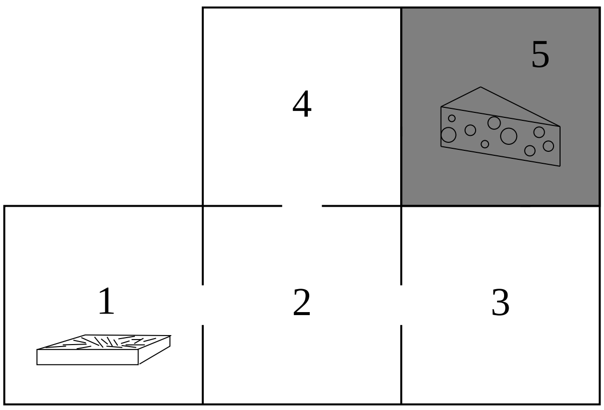
Problème 1. Une souris vit dans le labyrinthe représenté ci-dessous.



En 1 se trouve sa tanière, en 5 on a mis de la nourriture. On suppose que lorsque la souris se trouve dans l'une des cases 2, 3 ou 4, elle choisit au hasard, de manière équiprobable, l'une des portes permettant de quitter la case. Si elle arrive dans sa tanière ou dans la case contenant de la nourriture, elle y reste. L'unité de temps est le temps mis pour aller d'une case à l'autre.

(1) **(3pt)** Décrire le cheminement de la souris par une chaîne de Markov. Montrer que cette chaîne est absorbante. Ecrire la matrice de transition sous sa forme canonique.
(2) **(3pt)** Calculer la matrice fondamentale de la chaîne.
(3) **(3pt)** On place la souris dans la case 4. Calculer le nombre moyen de pas jusqu'à ce qu'elle atteigne soit la nourriture, soit sa tanière.
(4) **(3pt)** On place la souris dans la case 4. Avec quelle probabilité atteint-elle sa tanière?

Question subsidiaire: (4pt) On ferme les portes de la case 5. On suppose maintenant que si la souris atteint sa tanière, elle en repart aussitôt (c.f. figure ci-dessous).



Quelle est la distribution invariante du processus? Si elle part de sa tanière, après combien de temps, en moyenne, la souris y revient-elle pour la première fois?

Problème 2. Des voitures arrivent à une station service sous la forme d'un processus de Poisson $N_{]0,t]} = N_t$, de paramètre λ, qui mesure le nombre de voitures qui arrivent par heure à la station pour prendre du carburant.

(1) Si on sait que deux voitures exactement arrivent pendant la première heure, quelle est la probabilité
  (a) **(2pt)** que les deux arrivent pendant la première demi-heure
  (b) **(2pt)** qu'exactement une voiture arrive pendant la première demi-heure.

(2) On suppose dans toute cette question que $\lambda = 6$. On fait l'hypothèse que la valeur en euros de carburant pris par le i-ème automobiliste est donnée par une variable aléatoire discrète Y_i, d'espérance $\mathbb{E}(Y_i) = 20$. On suppose de plus que les variables aléatoires Y_i sont indépendantes, et indépendantes des variables $N_{]0,t]}$. Soit la variable aléatoire U_t qui mesure le montant en euros encaissé par la station service en t heures:

$$U_t : \begin{array}{lcl} (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) & \to & \mathbb{N} \\ \omega & \mapsto & Y_1(\omega) + Y_2(\omega) + \cdots + Y_{N(t)(\omega)}(\omega) \end{array}$$

(si $N(t)(\omega) = 0$, on pose $U_t(\omega) = 0$).

Soit $g_t(z) = \mathbb{E}(z^{U_t})$ la fonction génératrice de U_t et $h(z)$ la fonction génératrice de Y_1.

  (a) **(2pt)** Montrer l'égalité

(1) $$g_t(z) = \exp(6\,t(h(z) - 1)).$$

  (b) **(2pt)** Rappeler la propriété qui relie la fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète et l'espérance de cette variable aléatoire.
  En déduire, à l'aide de l'égalité (1) ci-dessus, la moyenne des sommes encaissées pendant une journée de travail de $t = 12$ heures.