# TD M43 – Probabilités

## Série 4 – Chaînes de Markov

### Exercice 1

Deux joueurs jouent à la variante suivante de Pile ou Face. Une pièce de monnaie équilibrée est lancée de manière répétée. Le joueur A gagne si la pièce tombe trois fois de suite sur Face. Le joueur B gagne dès que la suite Pile-Face-Pile apparaît. On cherche la probabilité que chaque joueur a de gagner.

1. Soit `*PP` l'événement "les deux derniers jets ont donné Pile". De manière analogue, on définit `*PF`, `*FF` et `*FP`. Montrer que le jeu peut être modélisé par une chaîne de Markov à six états `*PP`, `*PF`, `*FF`, `*FP`, `A gagne` et `B gagne`.
2. Montrer qu'on peut réduire le problème à celui de la description d'une chaîne de Markov à cinq états `*P`, `*PF`, `*FF`, `A gagne` et `B gagne`, où `*P` = `*FP` ∪ `*PP`.
3. Calculer la matrice de transition de la chaîne et sa matrice fondamentale $N$.
4. En prenant comme distribution initiale de la chaîne l'état après les deux premiers jets, calculer la probabilité que le joueur A gagne, et le nombre moyen de jets du jeu.

### Exercice 2

Un cavalier se promène sur un échiquier en choisissant à chaque instant, de manière équiprobable, l'un des mouvements permis par les règles du jeu des Echecs. Calculer le temps de récurrence moyen vers le coin inférieur gauche de l'échiquier.
*Indication:* La chaîne est irréductible. Montrer que sa distribution invariante est proportionnelle au nombre de mouvements permis depuis chaque case.

### Exercice 3

Montrer que la distribution invariante du modèle d'Ehrenfest est binomiale.

### Exercice 4

Montrer que pour toute distribution de probabilité $\nu$ sur l'ensemble $\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, m\}$, il existe une chaîne de Markov sur $\mathcal{X}$ telle que la loi du temps de premier retour en 0 soit donnée par $\nu$.
*Indication:* Choisir les probabilités de transition telles que $p_{ij} = 0$ si $j \notin \{0, i+1\}$.