TD M43 – Probabilités

Série 3 – Suites de variables aléatoires

Exercice 1

Calculer $\limsup_{n\to\infty} A_n$ et $\liminf_{n\to\infty} A_n$ dans le cas où

$$A_n = \begin{cases} [-1, 2+\frac{1}{n}] & \text{si } n \text{ est pair,} \\ [-2-\frac{1}{n}, 1] & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Exercice 2

Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que $X_n \to 0$ en probabilité si et seulement si $\mathbb{P}\{X_n > 0\}$ tend vers 0.
2. Montrer que si la série $(\mathbb{P}\{X_n > 0\})_{n\geqslant 1}$ est convergente alors $X_n \to 0$ presque sûrement. Montrer par un exemple que la réciproque n'est pas vraie.
3. Montrer si les X_n sont indépendantes, alors $X_n \to 0$ presque sûrement si et seulement si la série $(\mathbb{P}\{X_n > 0\})_{n\geqslant 1}$ est convergente.
   Indication: Utiliser le second lemme de Borel–Cantelli: Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements indépendants tels que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{A_n\} = \infty$, alors $\mathbb{P}\{\limsup_{n\to\infty} A_n\} = 1$.
4. On suppose que X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre p_n. Déterminer si X_n tend vers 0 dans $\mathcal{L}_1$, en probabilité, presque sûrement, si $p_n = 1/n^2$, et si $p_n = 1/n$.
5. On suppose que X_n suit une loi de Poisson de paramètre λ_n. Déterminer si X_n tend vers 0 dans $\mathcal{L}_1$, en probabilité, presque sûrement, si $\lambda_n = 1/n$, et si $\lambda_n = 1/n^2$.
6. On suppose que la loi de X_n est donnée par $\mathbb{P}\{X_n = n^2\} = \alpha_n$ et $\mathbb{P}\{X_n = 0\} = 1-\alpha_n$. Déterminer si X_n tend vers 0 dans $\mathcal{L}_1$, en probabilité, presque sûrement, si $\alpha_n = 1/n$, si $\alpha_n = 1/n^2$, et si $\alpha_n = 1/n^3$.

Exercice 3

Dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, on dit que la variable aléatoire X suit la loi de Cauchy de paramètre $c > 0$ si sa densité par rapport à la mesure de Lebesgue est donnée par

$$f(x) = \frac{c}{\pi(c^2+x^2)} .$$

1. Quelle est l'espérance de X?
2. A l'aide du théorème des résidus, calculer la fonction caractéristique $\chi_X(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX})$ de X.
3. Si Y suit une loi de Cauchy de paramètre c', et est indépendante de X, quelle est la loi de $X+Y$?
4. Soient $X_1, X_2, \dots$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Cauchy de paramètre $c = 1$, et soit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.
   Déterminer les lois de S_n/n, de $\limsup_{n\to\infty} S_n/n$ et de $\liminf_{n\to\infty} S_n/n$.